8.1 ELASTICITY, PLASTICITY, STRESS & STRAIN

Elasticity vs Plasticity (प्रत्यास्थता बनाम सुघट्यता): **Elasticity** is the property of a body by virtue of which it tends to regain its original size and shape when the deforming force is removed (e.g., steel, quartz). **Plasticity** is the inability to regain original shape, causing permanent deformation (e.g., putty, wet clay).

विरूपक बल हटाने पर वस्तु का अपनी मूल आकृति व आकार पुनः प्राप्त करने का गुण प्रत्यास्थता कहलाता है (जैसे इस्पात, क्वार्ट्ज)। स्थायी विरूपण सुघट्यता कहलाता है।

Stress (प्रतिबल): σ = F / A: The internal restoring force developed per unit cross-sectional area of a deformed body: **Stress = F / A**. SI unit: **N m^{-2} or Pascal (Pa)**; Dimension: **$[M^1L^{-1}T^{-2}]$**. Types: (1) **Longitudinal (Tensile/Compressive)**, (2) **Shearing (Tangential)**, (3) **Hydraulic (Volume) Stress**.

विरूपित पिंड के एकांक अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल पर लगने वाला आंतरिक प्रत्यानयन बल प्रतिबल (F/A) कहलाता है। इसका SI मात्रक पास्कल (Pa) है।

Strain (विकृति): ε = Δx / x: Ratio of change in configuration to original configuration. It is a **dimensionless & unitless** pure number $[M^0L^0T^0]$. Types: (1) **Longitudinal Strain = ΔL / L**, (2) **Shear Strain = Δx / L = tanθ ≈ θ**, (3) **Volume Strain = ΔV / V**.

आकार में परिवर्तन तथा प्रारंभिक आकार का अनुपात विकृति कहलाता है। यह मात्रकहीन व विमाहीन राशि है।

Key Exam Point: Steel is MORE elastic than rubber because for the same stress, steel suffers MUCH smaller strain (Y_steel ≫ Y_rubber)!

इस्पात रबर से अधिक प्रत्यास्थ है क्योंकि समान प्रतिबल पर इस्पात में विकृति बहुत कम होती है!

Hooke's Law (हुक का नियम — Robert Hooke, 1676): For small deformations within the proportional limit, **stress is directly proportional to strain**:
Stress ∝ Strain ⇒ Stress = E × Strain, where *E* is the **Modulus of Elasticity** (SI unit: N/m^2 or Pa).

छोटे विरूपणों के लिए प्रत्यास्थता सीमा के भीतर प्रतिबल, विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है (प्रतिबल = E × विकृति)।

TYPICAL STRESS–STRAIN CURVE FOR A DUCTILE METAL (HOOKE'S LAW REGION)

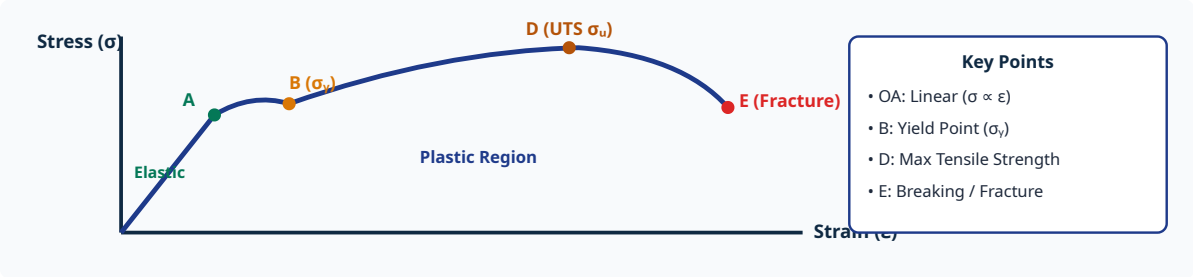


Fig 8.1: O-A Proportional limit (Hooke's Law), B Yield point (σ_y), D Ultimate tensile strength (σ_u), E Fracture point.

Ductile, Brittle & Elastomers (तन्य, भंगुर एवं प्रत्यास्थलक): • **Ductile:** Large plastic region between B & E (Copper, Steel). • **Brittle:** Fracture right after elastic limit (Glass, Cast Iron). • **Elastomers:** Stretch to several times original length without plastic region; do NOT obey Hooke's law (Rubber, Aorta tissue).

तन्य पदार्थों में सुघट्य क्षेत्र बड़ा होता है; भंगुर पदार्थ तुरंत टूट जाते हैं; प्रत्यास्थलक (रबर) हुक के नियम का पालन नहीं करते।

Key Exam Point: Quartz and Phosphor Bronze have almost ZERO elastic after-effect—used in galvanometer suspensions!

क्वार्ट्ज और फॉस्फर ब्रॉन्ज में प्रत्यास्थ उत्तर-प्रभाव लगभग शून्य होता है।

Poisson's Ratio (पॉयसन अनुपात σ): Ratio of lateral strain to longitudinal strain: **$\sigma = -(\Delta D / D) / (\Delta L / L)$**. It is dimensionless. Theoretical limits: **$-1 \leq \sigma \leq +0.5$**; practical limit for metals: **$0 < \sigma < 0.5$** (usually 0.2 to 0.4).

अनुप्रस्थ विकृति और अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात पॉयसन अनुपात (σ) कहलाता है। व्यावहारिक सीमा 0 से 0.5 के बीच होती है।

Modulus	Formula	Applicable State
1. Young's Modulus (Y)	$Y = (F/A) / (\Delta L/L) = (F\ L) / (A\ \Delta L)$	Solids ONLY (Wire/Rod stretching)
2. Shear Modulus / Rigidity (G or η)	$G = (F/A) / \theta = F / (A\ \theta)$	Solids ONLY ($G \approx Y/3$ for metals)
3. Bulk Modulus (B)	$B = -P / (\Delta V/V) = -V\ (dP/dV)$	Solids, Liquids & Gases!
Compressibility (K)	$K = 1 / B$ (SI unit: Pa^{-1} or m^2/N)	Gases are most compressible; solids least

Key Exam Point: Bulk Modulus of an incompressible fluid = ∞ (Infinite); Shear Modulus of a fluid (liquid/gas) = 0!

असंपीड्य द्रव का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक अनंत (∞) होता है, तथा तरलों का अपरूपण गुणांक शून्य होता है।

Work Done & Elastic Energy Stored (खिंचे तार में संचित स्थितिज ऊर्जा): When a wire of length *L* and area *A* is stretched by ΔL by force F:
U = ½ × F × ΔL = ½ × Stress × Strain × Volume.

तार को ΔL खींचने में किया गया कार्य उसमें प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है: U = ½ F ΔL।

Elastic Energy Density u (एकांक आयतन में ऊर्जा): u = U / Volume = ½ × Stress × Strain = ½ Y (Strain)² = (Stress)² / (2Y). Dimension: $[ML^{-1}T^{-2}]$ (same as Stress and Pressure!).

एकांक आयतन की प्रत्यास्थ ऊर्जा u = ½ × प्रतिबल × विकृति = ½ Y (विकृति)² = (प्रतिबल)²/(2Y)।

Thermal Stress in Clamped Rod (तापीय प्रतिबल): When a rod clamped at both ends is heated/cooled by ΔT, thermal strain = α ΔT, so **Thermal Stress = Y α ΔT** and **Thermal Force F = Y A α ΔT** (independent of rod's length L!).

दोनों सिरों पर कसी छड़ को ΔT गर्म करने पर तापीय प्रतिबल = YαΔT और बल F = YAαΔT उत्पन्न होता है।

Key Exam Point: Breaking Stress = Tensile Strength depends ONLY on the MATERIAL of the wire—NOT on its length or radius!

भंजक प्रतिबल केवल तार के पदार्थ पर निर्भर करता है, उसकी लंबाई या मोटाई पर नहीं!

1. Crane Metallic Rope Thickness (क्रेन की रस्सी की मोटाई): For lifting max load M = 10^4 kg with safety factor 10 (max stress ≤ $\sigma_y/10$), required cross-sectional area A ≥ Mg / ($\sigma_y/10$) ⇒ thicker rope or braided steel wires (flexible + strong).

भारी भार उठाने वाली क्रेन की रस्सी की न्यूनतम त्रिज्या इस्पात की पराभव क्षमता (σ_y) के आधार पर तय की जाती है।

2. Bending of Beams & I-Shaped Girders (धरन का झुकना व I-गर्डर): Central depression of a rectangular beam (length *l*, breadth *b*, depth *d*) loaded at centre by W: **$\delta = W l^3 / (4 Y b d^3)$**. Since $\delta \propto 1/d^3$, increasing depth *d* reduces sagging dramatically; using an **I-shaped cross-section** gives high strength with less weight and cost!

आयताकार धरन का झुकाव $\delta = Wl^3/(4Ybd^3)$ होता है। I-आकार के गर्डर कम पदार्थ व भार में अधिक मजबूती देते हैं।

3. Maximum Height of a Mountain on Earth (पर्वत की अधिकतम ऊँचाई): Pressure at base of mountain of height *h* and rock density ρ is hρg ≤ elastic shear limit (~3×10^8 Pa) ⇒ **h_max ≈ 10 km** (explains why Mt. Everest is ~8.85 km!).

चट्टानों की अपरूपण सीमा के कारण पृथ्वी पर किसी पर्वत की अधिकतम ऊँचाई ~10 km से अधिक नहीं हो सकती।

Key Exam Point: To minimize sagging $\delta = Wl^3/(4Ybd^3)$ in bridges, depth 'd' is kept large and high-Y steel is used!

पुलों के धरनों का झुकाव कम करने के लिए गहराई d बड़ी और उच्च Y वाला इस्पात उपयोग किया जाता है।

8.6 INTERCONVERSION RELATIONS BETWEEN Y, G, B, σ

Standard Relations (प्रतियोगी परीक्षा हेतु महत्वपूर्ण संबंध): • **Y = 2 G (1 + σ)**
• **Y = 3 B (1 − 2σ)**
• **9 / Y = 3 / G + 1 / B** (or Y = 9BG / (3B + G))
• **σ = (3B − 2G) / (6B + 2G)**

प्रत्यास्थ गुणांकों में संबंध: Y = 2G(1+σ), Y = 3B(1−2σ), तथा 9/Y = 3/G + 1/B।

Effect of Temperature & Impurities on Elasticity: • **Temperature:** Increasing temperature DECREASES Young's modulus Y (exception: Invar steel).
• **Hammering / Rolling:** Breaks crystal grains, INCREASING elasticity.
• **Annealing (Heating & slow cooling):** Forms large grains, DECREASING elasticity.

ताप बढ़ाने पर प्रत्यास्थता गुणांक घटता है; हथौड़े से पीटने पर बढ़ता है तथा अनीलीकरण (annealing) से घटता है।

Material	Young's Modulus Y (× 10^9 Pa)	Bulk Modulus B (× 10^9 Pa)
Steel	200	160
Copper	110	140
Aluminium	70	70
Water (Liquid)	0	2.2

Key Exam Point: For an ideal incompressible material (ΔV = 0), Poisson's ratio σ = 0.5!

आदर्श असंपीड्य पदार्थ के लिए पॉयसन अनुपात σ = 0.5 होता है।

Elastic Hysteresis (प्रत्यास्थ शैथिल्य): For rubber-like elastomers, the unloading stress-strain curve does NOT retrace the loading curve—forming a closed loop called **elastic hysteresis**. The area of this loop equals the **heat energy dissipated per unit volume** per cycle (used in car tyres & shock absorbers!).

रबर जैसे पदार्थों में भार हटाने का वक्र भार लगाने के वक्र का अनुसरण नहीं करता; इस बंद लूप का क्षेत्रफल ऊष्मा हानि को दर्शाता है (शॉक एब्जॉर्बर में उपयोगी)।

Hollow vs Solid Shaft for Torque/Twisting: A **hollow shaft is stronger than a solid shaft** of the same mass, length, and material because its mass is distributed farther from the axis, giving a larger torsional rigidity.

समान द्रव्यमान व लंबाई का खोखला बेलन ठोस बेलन की तुलना में मरोड़ के प्रति अधिक मजबूत होता है।

Key Exam Point: Elastic fatigue: Repeated alternating stress weakens a metal wire over time (why bridges are periodically inspected!).

प्रत्यास्थ श्रांति: बार-बार प्रत्यावर्ती प्रतिबल लगाने से धातु कमजोर हो जाती है।

8.8 SOLVED NCERT NUMERICALS (PART 1)

Numerical 1: Steel & Brass Wires Loaded Together: Steel wire (L = 1.5 m, A, Y = 2×10^{11} Pa) stretched by 4 kg + 6 kg = 10 kg (F = 100 N). Elongation $\Delta L = FL/(AY)$. With r = 0.125 cm, A = 4.91×10^{-6} m^2 ⇒ $\Delta L = (100 \times 1.5)/(4.91\times10^{-6} \times 2\times10^{11})$ = **1.53×10^{-4} m**.

$\Delta L = FL/(AY)$ सूत्र से 1.5 m लंबे इस्पात के तार में 1.53×10^{-4} m की वृद्धि प्राप्त होती है।

Numerical 2: Bulk Modulus & Fractional Volume Change of Water at Ocean Depth: At depth where pressure P = 2.0×10^7 Pa, B_{water} = 2.2×10^9 Pa. Fractional compression $|\Delta V/V| = P / B = (2.0\times10^7)/(2.2\times10^9)$ = **9.09×10^{-3} (0.91%)**.

गहराई पर पानी के आयतन में भिन्नात्मक संपीड़न $\Delta V/V = P/B = 9.09 \times 10^{-3}$ (0.91%)।

Numerical 3: Copper Wire Stretched by 1 mm (L = 2 m, A = 1 mm^2, Y = 1.1×10^{11} Pa): Force $F = YA\,\Delta L / L = (1.1\times10^{11} \times 10^{-6} \times 10^{-3}) / 2$ = **55 N**. Energy stored $U = ½\,F\,\Delta L = 0.5 \times 55 \times 10^{-3}$ = **0.0275 J**.

आवश्यक बल F = 55 N तथा संचित प्रत्यास्थ ऊर्जा $U = ½F\Delta L$ = 0.0275 J।

Key Exam Point: Unit conversion alert: 1 mm^2 = 10^{-6} m^2 and 1 cm^2 = 10^{-4} m^2!

मात्रक रूपांतरण सावधानी: 1 mm^2 = 10^{-6} m^2 और 1 cm^2 = 10^{-4} m^2 होता है!

Q1. Why is steel more elastic than rubber?: Young's modulus Y = Stress/Strain. For the same applied stress, steel undergoes very small elongation (strain) compared to rubber. Therefore $Y_{steel} \gg Y_{rubber}$, making steel more elastic.

समान प्रतिबल के लिए इस्पात में विकृति रबर की तुलना में अत्यंत कम होती है, अतः $Y_{steel} \gg Y_{rubber}$ होता है।

Q2. Why are girders given an I-shape?: Bending depression $\delta = Wl^3/(4Ybd^3)$. An I-beam concentrates material at the top and bottom flanges where bending stress is maximum, maximising effective depth *d* and minimising weight and cost.

I-आकार के गर्डर ऊपर व नीचे अधिकतम प्रतिबल झेलते हैं तथा कम भार व लागत में अधिक मजबूती देते हैं।

Q3. A wire of length L and radius r is cut into two equal halves. How does Young's modulus Y change?: Young's modulus Y is an intensive property of the material (independent of dimensions L and r), so it remains **UNCHANGED**.

यंग गुणांक पदार्थ का गुण है (लंबाई या त्रिज्या पर निर्भर नहीं), अतः यह अपरिवर्तित रहेगा।

Q4. What is the Young's modulus of a perfectly rigid body?: For a perfectly rigid body, strain $\Delta L/L = 0$ for any finite stress, so Y = Stress/0 = **Infinity (∞)**.

पूर्णतः दृढ़ पिंड के लिए विकृति शून्य होती है, अतः यंग गुणांक अनंत (∞) होता है।

Key Exam Point: Breaking force F_{max} = Breaking Stress × Area ($\propto r^2$), so doubling wire radius quadruples its breaking load!

भंजक बल $F_{max} \propto r^2$ होता है; अतः तार की त्रिज्या दोगुनी करने पर वह 4 गुना अधिक भार सहन कर सकता है।

Last-Minute Exam Checklist (अंतिम परीक्षा जाँच सूची): 1. Draw and label the Stress–Strain curve (A, B, D, E). 2. Memorise all 3 Moduli + Energy Density derivation. 3. Practise Steel vs Rubber and I-beam conceptual questions.

1. प्रतिबल-विकृति वक्र (A, B, D, E) का अभ्यास करें। 2. तीनों प्रत्यास्थ गुणांक व ऊर्जा घनत्व याद करें। 3. इस्पात बनाम रबर व I-गर्डर प्रश्न दोहराएँ।

Concept	Formula	SI Unit / Limit
Stress & Strain	$\sigma = F/A$; $\varepsilon = \Delta L/L$	Pa (N/m^2) ; Dimensionless
Young's Modulus (Y)	$Y = (F\,L) / (A\,\Delta L)$	Solids only (Pa)
Shear Modulus (G)	$G = (F/A) / \theta$	Solids only (Pa)
Bulk Modulus & Compressibility	$B = -P/(\Delta V/V)$; $K = 1/B$	All states; K unit Pa^{-1}
Poisson's Ratio (σ)	$\sigma = -(\Delta D/D)/(\Delta L/L)$	Practical: $0 < \sigma < 0.5$
Elastic Energy & Density	$U = \frac{1}{2} F \Delta L$; $u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \sigma^2/(2Y)$	J and J/m^3
Thermal Stress / Force	$\sigma_{th} = Y\alpha\Delta T$; $F = YA\alpha\Delta T$	Independent of length L
Beam Sagging	$\delta = W l^3 / (4\,Y\,b\,d^3)$	$\delta \propto 1/d^3$

Key Exam Point: Narayan Sir's Mantra: Stress, Pressure, Energy Density, and Elastic Moduli ALL share the exact same dimension $[M^1L^{-1}T^{-2}]$!

नारायण सर का मंत्र: प्रतिबल, दाब, ऊर्जा घनत्व और सभी प्रत्यास्थ गुणांकों की विमा समान $[M^1L^{-1}T^{-2}]$ होती है!