3.1 SCALARS AND VECTORS — TYPES & REPRESENTATION

Chapter 3 • Motion in a Plane

Scalar vs Vector Quantities (अदिश एवं सदिश राशियाँ): Scalars have only magnitude and no direction; they add by ordinary algebra (e.g., mass, speed, distance, time, temperature, work, energy). **Vectors** have BOTH magnitude and direction AND obey the **triangle/parallelogram law of vector addition** (e.g., displacement, velocity, acceleration, force, momentum).

अदिश राशियों में केवल परिमाण होता है, जबकि सदिश राशियों में परिमाण व दिशा दोनों होते हैं और वे सदिश योग के नियम का पालन करती हैं।

Position & Displacement Vectors (स्थिति व विस्थापन सदिश): Position vector from origin O to P(x,y): $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, magnitude $|\mathbf{r}| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Displacement vector from P_1 to P_2: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$.

स्थिति सदिश $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ और विस्थापन सदिश $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ होता है।

Unit Vector & Zero (Null) Vector (एकांक एवं शून्य सदिश): A **unit vector ($\hat{A}$)** has magnitude 1 and points in the direction of A: $\hat{A} = \mathbf{A} / |\mathbf{A}|$. Orthogonal unit vectors along X, Y, Z axes are $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. A **null vector ($0$)** has zero magnitude and arbitrary direction (e.g., $\mathbf{A} - \mathbf{A} = 0$).

एकांक सदिश $\hat{A} = A/|A|$ का परिमाण 1 होता है; यह केवल दिशा दर्शाता है। शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है।

Vector Type	Definition	Example
Equal Vectors	Same magnitude AND same direction ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$)	Parallel displacements of 5 m East
Negative Vector	Same magnitude, opposite direction ($-\mathbf{A}$)	5 m East and 5 m West
Collinear Vectors	Act along the same or parallel lines ($\theta = 0°$ or $180°$)	Two forces along X-axis
Coplanar Vectors	Lie in the same plane	Any two vectors are always coplanar

Key Exam Point: Electric current has both magnitude and direction, yet it is a SCALAR because it does not obey vector addition laws!

विद्युत धारा में परिमाण व दिशा दोनों होने के बावजूद यह अदिश राशि है क्योंकि यह सदिश योग नियम का पालन नहीं करती।

Triangle & Parallelogram Law (त्रिभुज व समांतर चतुर्भुज नियम): If two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ act at an angle θ, their resultant $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ has magnitude:
$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$ and makes angle α with $\vec{A}$ given by: **$\tan\alpha = (B\sin\theta) / (A + B\cos\theta)$**.

दो सदिशों $\vec{A}$ और $\vec{B}$ (कोण θ) के परिणामी सदिश का परिमाण $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$ तथा दिशा $\tan\alpha = (B\sin\theta)/(A + B\cos\theta)$ होती है।

Special Cases of Resultant R (परिणामी के विशेष मान):
• When θ = 0° (same dir): **$R_{max} = A + B$**.
• When θ = 180° (opposite dir): **$R_{min} = |A - B|$**.
• When θ = 90° (perpendicular): **$R = \sqrt{A^2 + B^2}$**, $\tan\alpha = B/A$.
• When A = B: **$R = 2A\cos(\theta/2)$** (bisects angle θ).

θ=0° पर $R_{max} = A+B$; θ=180° पर $R_{min} = |A-B|$; θ=90° पर $R = \sqrt{A^2+B^2}$; और A=B होने पर $R = 2A\cos(\theta/2)$।

Resolution of a Vector in 2D & 3D (सदिश का वियोजन): A vector $\vec{A}$ at angle θ with X-axis splits into rectangular components: **$A_x = A\cos\theta$** and **$A_y = A\sin\theta$**, so **$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$** and $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan\theta = A_y/A_x$.

कोण θ पर स्थित सदिश के आयताकार घटक $A_x = A\cos\theta$ और $A_y = A\sin\theta$ होते हैं।

Key Exam Point: Lami's Theorem / Polygon Law: If n vectors form a closed polygon taken in order, their resultant vector sum is ZERO!

यदि सदिशों को क्रम से लेने पर वे एक बंद बहुभुज बनाते हैं, तो उनका परिणामी सदिश शून्य होता है।

Independence of Orthogonal Motions (लंबवत गतियों की स्वतंत्रता): Motion in a plane (2D) can be treated as **two independent simultaneous 1D motions** along X and Y axes:

• X-axis: $v_x = v_{0x} + a_x t$; $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

• Y-axis: $v_y = v_{0y} + a_y t$; $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

समतल (2D) में गति को X और Y अक्षों के अनुदिश दो स्वतंत्र एकविमीय गतियों के रूप में हल किया जाता है।

Relative Velocity in 2D: Rain–Man & River–Boat (आपेक्षिक वेग): v⃗_AB = v⃗_A − v⃗_B.

1. **Rain–Man:** Rain falling vertically (v_r) and man walking horizontally (v_m): umbrella must be tilted forward at angle θ from vertical where **tanθ = v_m / v_r**.

2. **River–Boat:** To cross a river of width *d* in **shortest time**, swim perpendicular to current (t_min = d/v_b). To cross along **shortest path** (zero drift), swim upstream at angle θ where **sinθ = v_r / v_b**.

वर्षा से बचने हेतु छाता ऊर्ध्वाधर से tanθ = v_m/v_r कोण पर झुकाना होता है। न्यूनतम समय में नदी पार करने हेतु धारा के लंबवत तैरें।

Key Exam Point: Shortest path across a river (zero drift) is possible ONLY when swimmer's speed v_b > river speed v_r!

नदी को न्यूनतम पथ (शून्य बहाव) से पार करना तभी संभव है जब तैराक की चाल v_b > नदी की चाल v_r हो।

What is Projectile Motion? (प्रक्षेप्य गति): An object thrown into space with initial velocity *u* at angle θ (≠ 90°) with the horizontal, moving under gravity alone ($a_x = 0$, $a_y = -g$), is called a **projectile**. Its horizontal velocity **$u_x = u\cos\theta$ remains constant** throughout!

क्षैतिज से θ कोण पर फेंकी गई वस्तु की गुरुत्व के अधीन गति को प्रक्षेप्य गति कहते हैं। इसमें क्षैतिज वेग u cosθ सदैव नियत रहता है।

PROJECTILE MOTION TRAJECTORY & VECTOR COMPONENTS

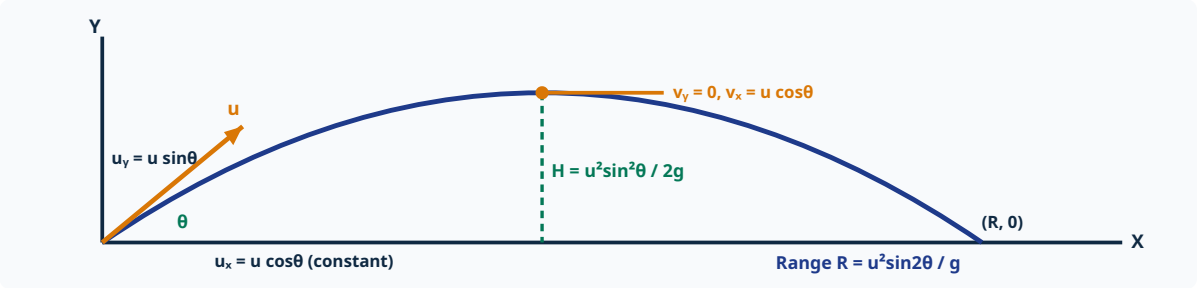

Fig 3.1: Parabolic trajectory $y = x\tan\theta - gx^2/(2u^2\cos^2\theta)$ with Time of Flight T, Max Height H, and Range R.

Parameter	Formula	Key Exam Fact
Equation of Trajectory	$y = x\tan\theta - gx^2 / (2u^2\cos^2\theta)$	Proves path is a PARABOLA
Time of Flight (T)	$T = 2u\sin\theta / g$	Time to reach max height = T/2 = u sinθ/g
Maximum Height (H)	$H = u^2\sin^2\theta / (2g)$	At top: $v_y = 0$, $v_x = u\cos\theta$, $KE = K_0\cos^2\theta$
Horizontal Range (R)	$R = u^2\sin(2\theta) / g$	Max Range $R_{max} = u^2/g$ at θ = 45°

Key Exam Point: Equal Ranges: For a given speed u, complementary angles θ and (90° − θ) give the EXACT SAME horizontal range R!

समान चाल u के लिए पूरक कोणों θ व (90° − θ) पर क्षैतिज परास R समान रहता है; अधिकतम परास θ = 45° पर मिलता है।

Horizontal Projectile from Height h (ऊँचाई h से क्षैतिज प्रक्षेपण): If a body is projected horizontally with speed *u* from a tower of height *h*:
• Time to hit ground: **$T = \sqrt{(2h/g)}$** (independent of *u*!).
• Horizontal range: **$R = u\sqrt{(2h/g)}$**.
• Impact speed: **$v = \sqrt{(u^2 + 2gh)}$**.

ऊँचाई h से क्षैतिज वेग u से फेंकने पर जमीन तक पहुँचने का समय $T = \sqrt{(2h/g)}$ तथा परास $R = u\sqrt{(2h/g)}$ होता है।

Relation Between Range R and Max Height H: Dividing $R = u^2(2\sin\theta\cos\theta)/g$ by $H = u^2\sin^2\theta/(2g)$ gives: **$R / H = 4\cot\theta$** (or **$4H = R\tan\theta$**). At $\theta = 45°$, **$R_{max} = 4H$**! When $R = H$, $\tan\theta = 4 \Rightarrow \theta \approx 76°$.

परास R और अधिकतम ऊँचाई H में संबंध: $4H = R\tan\theta$। 45° पर $R_{max} = 4H$ होता है।

Minimum Speed & Angular Momentum: At the highest point of a projectile, speed is **minimum ($u\cos\theta$)**, kinetic energy is minimum (**$\frac{1}{2}mu^2\cos^2\theta$**), and potential energy is maximum (**$\frac{1}{2}mu^2\sin^2\theta$**).

प्रक्षेप्य के उच्चतम बिंदु पर चाल न्यूनतम ($u\cos\theta$) और गतिज ऊर्जा $K_0\cos^2\theta$ होती है।

Key Exam Point: Two bullets—one dropped vertically and another fired horizontally from the same height—hit the ground at the EXACT SAME time!

एक ही ऊँचाई से एक गोली ऊर्ध्वाधर गिराई जाए और दूसरी क्षैतिज दागी जाए, तो दोनों एक साथ जमीन पर गिरेंगी!

Angular Variables (कोणीय चर): • **Angular displacement (Δθ)** = Δs / r (unit: rad).
• **Angular velocity (ω)** = dθ/dt = 2πν = 2π/T (unit: rad/s).
• Relation with linear speed: **v = ωr** (vector form: **v⃗ = ω⃗ × r⃗**).

कोणीय वेग ω = 2π/T = 2πν, तथा रेखीय वेग व कोणीय वेग में संबंध v = ωr होता है।

Why Uniform Circular Motion is Accelerated (एकसमान वृत्तीय गति त्वरित क्यों है?): Even though speed *v* is constant, the **direction of velocity changes continuously** at every point (tangent to the circle). Hence UCM is an accelerated motion.

यद्यपि चाल v नियत रहती है, परंतु प्रत्येक बिंदु पर वेग की दिशा बदलती रहती है; अतः एकसमान वृत्तीय गति एक त्वरित गति है।

Centripetal Acceleration (अभिकेंद्र त्वरण): The acceleration is always directed radially inward toward the centre of the circle:
$a_c = v^2 / r = \omega^2 r = 4\pi^2\nu^2 r$. Corresponding centripetal force: **$F_c = mv^2 / r$**.

अभिकेंद्र त्वरण सदैव वृत्त के केंद्र की ओर दिष्ट होता है: $a_c = v^2/r = \omega^2 r$।

Quantity	Linear Motion	Circular Motion	Relation
Displacement	s (m)	θ (rad)	s = r θ
Velocity	v (m/s)	ω (rad/s)	v = r ω
Acceleration	a (m/s^2)	α (rad/s^2)	$a_t = r\alpha$; $a_c = v^2/r$

Key Exam Point: In UCM, velocity v⃗ and centripetal acceleration a⃗_c are ALWAYS perpendicular (90°) to each other; hence work done by F_c is ZERO!

एकसमान वृत्तीय गति में वेग और अभिकेंद्र त्वरण सदैव परस्पर लंबवत (90°) होते हैं, अतः अभिकेंद्र बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

Scalar (Dot) Product: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$: Gives a **scalar**. Commutative ($\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$). In components: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$. Orthogonal check: if $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$, vectors are perpendicular! Examples: Work $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$, Power $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$.

अदिश गुणनफल $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ से अदिश राशि मिलती है। यदि $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ हो, तो दोनों सदिश परस्पर लंबवत होते हैं।

Vector (Cross) Product: $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$: Gives a **vector** perpendicular to both $\vec{A}$ and $\vec{B}$ (Right-Hand Screw Rule). Anti-commutative: $\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A})$. Parallel check: if $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$, vectors are parallel. Examples: Torque $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$, Angular momentum $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

सदिश गुणनफल $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$ से एक नया सदिश मिलता है जो दोनों के लंबवत होता है।

Unit Vector Pair	Dot Product (·)	Cross Product (×)
$\hat{i}, \hat{i}$; $\hat{j}, \hat{j}$; $\hat{k}, \hat{k}$	$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$	$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$
$\hat{i}, \hat{j}$; $\hat{j}, \hat{k}$; $\hat{k}, \hat{i}$	$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$	$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$; $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

Key Exam Point: Area of parallelogram with sides $\vec{A}$ and $\vec{B}$ = $|\vec{A}\times\vec{B}|$; Area of triangle = $\frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$.

भुजाओं $\vec{A}$ और $\vec{B}$ वाले समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $|\vec{A}\times\vec{B}|$ और त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$ होता है।

Numerical 1: Rain Falling Vertically at 35 m/s, Wind East-to-West at 12 m/s: Resultant speed $v = \sqrt{(35^2 + 12^2)} = \sqrt{(1225 + 144)} = \sqrt{1369} = \mathbf{37\ m/s}$. Angle with vertical: $\tan\theta = 12/35 = 0.343 \Rightarrow \mathbf{\theta \approx 19°}$ toward East (into the wind).

वर्षा 35 m/s व हवा 12 m/s से चल रही है; परिणामी चाल = $\sqrt{(35^2 + 12^2)} = 37$ m/s तथा छाता ऊर्ध्वाधर से 19° पूर्व की ओर रखना होगा।

Numerical 2: Cricketer Throwing Ball (u = 28 m/s at 30°): Using $g = 9.8\ m/s^2$:
(a) Max Height $H = u^2\sin^2 30°/(2g) = (784 \times 0.25)/19.6 = \mathbf{10\ m}$.
(b) Time of Flight $T = 2u\sin 30°/g = (2 \times 28 \times 0.5)/9.8 = \mathbf{2.86\ s}$.
(c) Range $R = u^2\sin 60°/g = (784 \times 0.866)/9.8 = \mathbf{69.3\ m}$.

u = 28 m/s, θ = 30° पर अधिकतम ऊँचाई H = 10 m, उड्डयन काल T = 2.86 s तथा क्षैतिज परास R = 69.3 m।

Numerical 3: Insect Trapped in a Circular Groove (r = 12 cm, 7 rev in 100 s): Frequency $\nu = 7/100 = 0.07$ rps. Angular speed $\omega = 2\pi\nu = 2 \times 3.14 \times 0.07 = \mathbf{0.44\ rad/s}$. Linear speed $v = \omega r = 0.44 \times 12 = \mathbf{5.3\ cm/s}$. Centripetal acceleration $a_c = \omega^2 r = (0.44)^2 \times 12 = \mathbf{2.3\ cm/s^2}$.

12 cm त्रिज्या में 100 s में 7 चक्कर: ω = 0.44 rad/s, चाल v = 5.3 cm/s, तथा अभिकेंद्र त्वरण $a_c = 2.3\ cm/s^2$।

Key Exam Point: A cricketer can throw a ball to max horizontal distance $R_{max} = 100\ m \Rightarrow u^2/g = 100\ m \Rightarrow$ Max vertical height $= u^2/2g = 50$ m!

यदि अधिकतम क्षैतिज परास $R_{max} = 100$ m है, तो ठीक ऊपर फेंकने पर अधिकतम ऊँचाई $u^2/2g = 50$ m होगी!

Q1. Why does a projectile follow a parabolic path?: Horizontal motion has zero acceleration ($x = u\cos\theta \cdot t \Rightarrow t = x/(u\cos\theta)$), while vertical motion has constant downward acceleration g ($y = u\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$). Eliminating t gives $y = ax - bx^2$, which is the equation of a parabola.

क्षैतिज दिशा में त्वरण शून्य ($x \propto t$) और ऊर्ध्वाधर में नियत त्वरण $-g$ होने से $y = ax - bx^2$ प्राप्त होता है, जो परवलय का समीकरण है।

Q2. Can two vectors of different magnitudes give zero resultant? What about three?: Two unequal vectors can NEVER give zero resultant because $R_{min} = |A - B| \neq 0$. However, **three vectors** of unequal magnitudes can give zero resultant if they form a closed triangle (sum of any two > third).

दो असमान सदिशों का परिणामी कभी शून्य नहीं हो सकता, पर तीन असमान सदिश यदि बंद त्रिभुज बनाएँ तो उनका परिणामी शून्य हो सकता है।

Q3. A bullet fired at 30° hits ground 3 km away. Can it hit a target 5 km away by adjusting angle (same speed)?: $R = u^2\sin 60°/g = 3$ km $\Rightarrow u^2/g = 3 / 0.866 = 3.464$ km $= R_{max}$. Since R_{max} is only 3.464 km, hitting a target **5 km** away is impossible!

30° पर परास 3 km है, अतः अधिकतम परास $R_{max} = u^2/g = 3.464$ km होगा; इसलिए 5 km दूर लक्ष्य को भेदना असंभव है।

Q4. What is the angle between velocity and acceleration at the highest point of a projectile?: At the highest point, velocity is purely horizontal ($u\cos\theta$) and acceleration is purely vertical downward (g), so the angle is **90°**.

प्रक्षेप्य के उच्चतम बिंदु पर वेग क्षैतिज व त्वरण ऊर्ध्वाधर नीचे होता है, अतः दोनों के बीच कोण 90° होता है।

Key Exam Point: At what angle of projection are Horizontal Range R and Maximum Height H equal? Answer: $\tan\theta = 4 \Rightarrow \theta \approx 75.96°$!

किस प्रक्षेपण कोण पर क्षैतिज परास R और अधिकतम ऊँचाई H बराबर होते हैं? उत्तर: $\tan\theta = 4$ ($\theta \approx 76°$)।

Last-Minute Exam Checklist (अंतिम परीक्षा जाँच सूची): 1. Practise proof that projectile trajectory is parabolic. 2. Memorise all 4 projectile formulas (y, T, H, R) and R_max = 4H. 3. Master Triangle Law magnitude & direction derivation.

1. प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार सिद्ध करने का अभ्यास करें। 2. T, H, R व 4H = R tanθ सूत्र याद रखें। 3. त्रिभुज नियम की व्युत्पत्ति दोहराएँ।

Concept	Formula	Key Value / Note
Resultant of 2 Vectors	$R = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta)}$	$\tan\alpha = B\sin\theta / (A + B\cos\theta)$
Unit Vector & Components	$\hat{A} = \vec{A}/\lvert\vec{A}\rvert$; $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$	$A = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2)}$
Dot & Cross Product	$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$; $\lvert\vec{A}\times\vec{B}\rvert = AB\sin\theta$	$\vec{A}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \perp$; $\vec{A}\times\vec{B}=0 \Rightarrow \parallel$
Projectile Time of Flight	$T = 2u\sin\theta / g$	Time to peak = $u\sin\theta / g$
Projectile Max Height	$H = u^2\sin^2\theta / (2g)$	At peak: $v = u\cos\theta$
Projectile Horizontal Range	$R = u^2\sin(2\theta) / g$	$R_{max} = u^2/g$ at $\theta = 45°$; $4H = R\tan\theta$
Horizontal Projectile (h)	$T = \sqrt{(2h/g)}$; $R = u\sqrt{(2h/g)}$	Impact speed = $\sqrt{(u^2 + 2gh)}$
Uniform Circular Motion	$v = \omega r$; $a_c = v^2/r = \omega^2 r$	$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$

Key Exam Point: Narayan Sir's Mantra: Always break 2D projectile problems into separate X (constant u_x) and Y ($g = -9.8\ m/s^2$) columns!

नारायण सर का मंत्र: समतल गति के प्रश्नों को हमेशा X (नियत वेग) और Y (गुरुत्वीय त्वरण) अक्षों में अलग-अलग हल करें!