

TYBA COACHING CENTRE | टी वाई बी ए कोचिंग सेंटर

Contact / WhatsApp: 6367029449 • NCERT Class 10 Mathematics Complete Comprehensive Notes & Solutions

Chapter 12: Surface Areas and Volumes

अध्याय 12: पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

Section 1: Detailed Concepts & 3D Solid Mensuration Formulas

खंड 1: विस्तृत अवधारणाएँ एवं त्रिविमीय ठोसों के सूत्र

12.1 Surface Area of a Combination of Solids / 12.1 ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

[English Theory]: In daily life, we encounter shapes that are combinations of basic solids (e.g. an ice-cream cone is a cone + hemisphere; a capsule is a cylinder + two hemispheres; a test-tube is a cylinder + hemisphere).

• **Rule for Total Surface Area of Combined Solids:** The total surface area of the new solid is the sum of the curved surface areas of each of its individual parts (the contact surfaces glued together are NOT visible on the outside and must NOT be added!).

• **Formulas for Basic Solids:**

1. **Cuboid:** CSA = $2h(l + b)$; TSA = $2(lb + bh + hl)$; Volume = lbh .

2. **Cube:** CSA = $4a^2$; TSA = $6a^2$; Volume = a^3 .

3. **Right Circular Cylinder:** CSA = $2\pi rh$; TSA = $2\pi r(r + h)$; Volume = $\pi r^2 h$.

4. **Right Circular Cone:** Slant height $l = \sqrt{r^2 + h^2}$; CSA = πrl ; TSA = $\pi r(l + r)$; Volume = $(1/3)\pi r^2 h$.

5. **Sphere:** Surface Area = $4\pi r^2$; Volume = $(4/3)\pi r^3$.

6. **Hemisphere:** CSA = $2\pi r^2$; TSA = $3\pi r^2$; Volume = $(2/3)\pi r^3$.

[हिंदी सिद्धांत]: दैनिक जीवन में अधिकांश वस्तुएं मूलभूत ठोसों का संयोजन होती हैं (जैसे दवा का कैप्सूल = बेलन + दो अर्धगोले; आइसक्रीम कोन = शंकु + अर्धगोला)।

• **संयोजित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल:** संयोजित ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके प्रत्येक भाग के **वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों** का योग होता है (जोड़ी गई संपर्क सतहें बाहर से अदृश्य होती हैं, अतः उन्हें नहीं जोड़ा जाता)।

• **मूलभूत ठोसों के सूत्र:**

1. **घनाभ:** पार्श्व पृष्ठ = $2h(l + b)$, कुल पृष्ठ = $2(lb + bh + hl)$, आयतन = lbh ।

2. **घन:** पार्श्व पृष्ठ = $4a^2$, कुल पृष्ठ = $6a^2$, आयतन = a^3 ।

3. **बेलन:** वक्र पृष्ठ = $2\pi rh$, कुल पृष्ठ = $2\pi r(r + h)$, आयतन = $\pi r^2 h$ ।

4. **शंकु:** तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$, वक्र पृष्ठ = πrl , कुल पृष्ठ = $\pi r(l + r)$, आयतन = $(1/3)\pi r^2 h$ ।

5. **गोला:** पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$, आयतन = $(4/3)\pi r^3$ ।

6. **अर्धगोला:** वक्र पृष्ठ = $2\pi r^2$, कुल पृष्ठ = $3\pi r^2$, आयतन = $(2/3)\pi r^3$ ।

12.2 Volume of a Combination of Solids / 12.2 ठोसों के संयोजन का आयतन

[English Theory]: • **Additive Volume Rule:** The total volume of a solid formed by combining two or more basic solids is simply the **sum of the volumes of each of the constituting solids**.

Volume of combined solid = Volume of Solid 1 + Volume of Solid 2 + ...

• Unlike surface area, volume is purely additive and is not affected by overlapping contact boundaries.

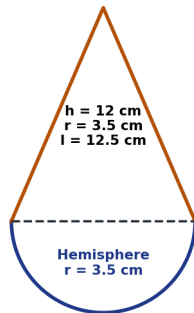
• **Subtractive Volume Rule (Depressions & Cavities):** When a cavity or depression is scooped out from a solid: Volume of remaining solid = Volume of original solid – Volume of cavity scooped out.

[हिंदी सिद्धांत]: • **आयतन का योज्य नियम:** दो या दो से अधिक ठोसों के संयोजन से बने नए ठोस का कुल आयतन उसके प्रत्येक घटक ठोस के आयतन के योग के बराबर होता है।

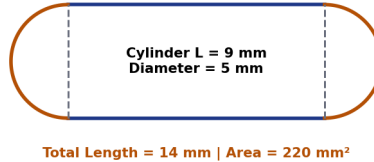
संयोजित ठोस का आयतन = ठोस 1 का आयतन + ठोस 2 का आयतन + ...

- पृष्ठीय क्षेत्रफल के विपरीत, आयतन में संपर्क सतहों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
- **खोखली/काटी गई आकृतियाँ:** शेष ठोस का आयतन = मूल ठोस का आयतन - काटी गई गुहिका (cavity) का आयतन।

Ex 12.1 Q3: Cone on Hemisphere



Ex 12.1 Q6: Medicine Capsule (14 mm)



Ex 12.2 Q7: Solid Inside Cylinder

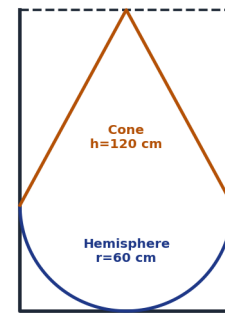


Fig 12.1: Combined 3D Solid Geometry: Toy (Cone on Hemisphere, Q3), Medicine Capsule (Cylinder + 2 Hemispheres, Q6), and Solid Inside Water-Filled Cylinder (Ex 12.2 Q7) — TYBA Coaching Centre

Section 2: Textbook Solved Examples with Step-by-Step Bilingual Solutions

खंड 2: पाठ्यपुस्तक के सभी हल किए गए उदाहरण (विस्तृत चरणबद्ध हल)

Textbook Example 1: Rasheed's Playing Top (Lattu) / उदाहरण 1: रशीद का लट्टू (शंकु + अर्धगोला)

[Problem - EN]: Rasheed got a playing top (lattu) as his birthday present, which surprisingly had no colour on it. He wanted to colour it with his crayons. The top is shaped like a cone surmounted by a hemisphere. The entire top is 5 cm in height and the diameter of the top is 3.5 cm. Find the area he has to colour. (Take $\pi = 22/7$)

[प्रश्न - HI]: रशीद को जन्मदिन के उपहार के रूप में एक लट्टू मिला, जिस पर रंग नहीं किया गया था। वह इस पर रंग करना चाहता है। यह लट्टू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला अध्यारोपित है। लट्टू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है। उसके द्वारा रंग किए जाने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

Step-by-Step Solution (English):

Radius $r = 3.5 / 2 = 1.75$ cm.

Height of cone $h = 5 - 1.75 = 3.25$ cm.

Slant height $l = \sqrt{(r^2 + h^2)} = \sqrt{(1.75)^2 + (3.25)^2} = \sqrt{(3.0625 + 10.5625)} = \sqrt{13.625} \approx 3.7$ cm.

Surface area of top = CSA of hemisphere + CSA of cone

$$= 2\pi r^2 + \pi r l = \pi r(2r + l) = (22/7) \times 1.75 \times [2(1.75) + 3.7] = (22 \times 0.25) \times (3.5 + 3.7) = 5.5 \times 7.2 = 39.6 \text{ cm}^2.$$

चरणबद्ध हल (हिंदी):

त्रिज्या $r = 3.5/2 = 1.75$ cm। शंकु की ऊँचाई $h = 5 - 1.75 = 3.25$ cm।

तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{(1.75^2 + 3.25^2)} \approx 3.7$ cm।

लट्टू का कुल क्षेत्रफल = अर्धगोले का वक्र पृष्ठ + शंकु का वक्र पृष्ठ

$$= \pi r(2r + l) = 5.5 \times (3.5 + 3.7) = 39.6 \text{ cm}^2.$$

Textbook Example 2: Decorative Block (Cube Surmounted by Hemisphere) / उदाहरण 2: सजावटी ब्लॉक (घन पर अर्धगोला)

[Problem - EN]: The decorative block shown in Fig. 12.7 is made of two solids — a cube and a hemisphere. The base of the block is a cube with edge 5 cm, and the hemisphere fixed on the top has a diameter of 4.2 cm. Find the total surface area of the block. (Take $\pi = 22/7$)

[प्रश्न - HI]: सजावटी ब्लॉक दो ठोसों — एक घन और एक अर्धगोले से बना है। ब्लॉक का आधार 5 cm कोर वाला एक घन है और उसके ऊपर लगे अर्धगोले का व्यास 4.2 cm है। इस ब्लॉक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

Step-by-Step Solution (English):

Total surface area of block = TSA of cube – Base area of hemisphere + CSA of hemisphere

$$= 6a^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = 6a^2 + \pi r^2.$$

Here $a = 5$ cm, $r = 4.2 / 2 = 2.1$ cm.

$$\text{TSA} = 6(5)^2 + (22/7) \times (2.1)^2 = 6(25) + (22/7) \times 4.41 = 150 + 13.86 = \mathbf{163.86 \text{ cm}^2}.$$

चरणबद्ध हल (हिंदी):

ब्लॉक का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का कुल पृष्ठ – अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल + अर्धगोले का वक्र पृष्ठ

$$= 6a^2 + \pi r^2 = 6(25) + (22/7)(2.1)^2 = 150 + 13.86 = \mathbf{163.86 \text{ cm}^2}.$$

Textbook Example 5: Shanta's Shed (Cuboid with Half-Cylinder Roof) / उदाहरण 5: शांता का शेड (घनाभ पर अर्ध-बेलन की छत)

[Problem - EN]: Shanta runs an industry in a shed which is in the shape of a cuboid surmounted by a half-cylinder. If the base of the shed is of dimension 7 m $\times$ 15 m, and the height of the cuboidal portion is 8 m, find the volume of air that the shed can hold.

[प्रश्न - HI]: शांता एक शेड में उद्योग चलाती है। यह शेड एक घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्ध-बेलन अध्यारोपित है। यदि आधार की विमाएँ 7 m $\times$ 15 m और घनाभाकार भाग की ऊँचाई 8 m है, तो शेड में समा सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ लीजिए)

Step-by-Step Solution (English):

Volume of air = Volume of cuboid + Volume of half-cylinder.

$$\text{Volume of cuboid} = l \times b \times h = 15 \times 7 \times 8 = \mathbf{840 \text{ m}^3}.$$

Diameter of half-cylinder = 7 m $\Rightarrow$ radius $r = 3.5$ m; length $H = 15$ m.

$$\text{Volume of half-cylinder} = \frac{1}{2} \times \pi r^2 H = \frac{1}{2} \times (22/7) \times (3.5)^2 \times 15 = \frac{1}{2} \times 22 \times 0.5 \times 3.5 \times 15 = \mathbf{288.75 \text{ m}^3}.$$

$$\text{Total volume of air} = 840 + 288.75 = \mathbf{1128.75 \text{ m}^3}.$$

चरणबद्ध हल (हिंदी):

हवा का कुल आयतन = घनाभ का आयतन + अर्ध-बेलन का आयतन।

$$\text{घनाभ का आयतन} = 15 \times 7 \times 8 = 840 \text{ m}^3.$$

$$\text{अर्ध-बेलन का आयतन} = \frac{1}{2} \times (22/7) \times (3.5)^2 \times 15 = 288.75 \text{ m}^3.$$

$$\text{कुल आयतन} = 840 + 288.75 = \mathbf{1128.75 \text{ m}^3}.$$

Section 3: Exercise 12.1 Complete Step-by-Step Solutions

खंड 3: प्रश्नावली 12.1 के संपूर्ण चरणबद्ध हल

Exercise 12.1 — Complete Solutions (Q1 to Q9) / प्रश्नावली 12.1 — संपूर्ण हल

[EN] Detailed solutions for Exercise 12.1 Q1 to Q9.

[HI] प्रश्नावली 12.1 के प्रश्न 1 से 9 तक के संपूर्ण हल:

- **Q1 (2 cubes of volume 64 cm³ joined end to end):** Side $a = 4$ cm. Cuboid: $l = 8$, $b = 4$, $h = 4$ cm.
Surface area = $2(lb + bh + hl) = 2(32 + 16 + 32) = 2(80) = \mathbf{160 \text{ cm}^2}$.
- **Q2 (Hollow hemisphere $d = 14$ cm mounted by cylinder, total height 13 cm):** $r = 7$ cm, cylinder $h = 13 - 7 = 6$ cm.
Inner surface area = $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h) = 2 \times (22/7) \times 7 \times (7 + 6) = 44 \times 13 = \mathbf{572 \text{ cm}^2}$.
- **Q3 (Toy Cone on Hemisphere, $r = 3.5$ cm, total height 15.5 cm — Fig 12.1 Left):** Cone $h = 12$ cm, $l = \sqrt{(3.5)^2 + 12^2} = 12.5$ cm.
TSA = $2\pi r^2 + \pi rl = \pi r(2r + l) = (22/7) \times 3.5 \times (7 + 12.5) = 11 \times 19.5 = \mathbf{214.5 \text{ cm}^2}$.

- **Q4 (Cube of side 7 cm surmounted by hemisphere):** Greatest diameter = 7 cm.
Surface area = $6a^2 + \pi r^2 = 6(49) + (22/7)(3.5)^2 = 294 + 38.5 = 332.5 \text{ cm}^2$.
- **Q5 (Hemispherical depression diameter l cut from cube edge l):** Remaining surface area = $6l^2 + \pi(l/2)^2 = (l^2/4)(\pi + 24)$.
- **Q6 (Medicine Capsule length 14 mm, diameter 5 mm — Fig 12.1 Middle):** $r = 2.5 \text{ mm}$, cylinder $h = 14 - 5 = 9 \text{ mm}$.
Surface area = $2\pi rh + 2(2\pi r^2) = 2\pi r(h + 2r) = 2(22/7)(2.5)(14) = 220 \text{ mm}^2$.
- **Q7 (Tent Cylinder $h = 2.1 \text{ m}$, $d = 4 \text{ m}$; Conical top $l = 2.8 \text{ m}$):** Canvas area = $2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l) = (22/7)(2)(4.2 + 2.8) = 44 \text{ m}^2$.
Cost of canvas = $44 \times 500 = ₹ 22,000$.
- **Q8 (Solid cylinder $h = 2.4 \text{ cm}$, $d = 1.4 \text{ cm}$ with conical cavity scooped out):** Slant height $l = \sqrt{(0.7^2 + 2.4^2)} = 2.5 \text{ cm}$.
TSA = $2\pi rh + \pi r^2 + \pi rl = \pi r(2h + r + l) = 2.2(4.8 + 0.7 + 2.5) = 2.2 \times 8 = 17.6 \approx 18 \text{ cm}^2$.
- **Q9 (Wooden cylinder $h = 10 \text{ cm}$, $r = 3.5 \text{ cm}$ with two scooped hemispheres):**
TSA = $2\pi rh + 2(2\pi r^2) = 2\pi r(h + 2r) = 2(22/7)(3.5)(10 + 7) = 22 \times 17 = 374 \text{ cm}^2$.

Final Answer / उत्तर: All 9 problems of Ex 12.1 solved and verified.

Section 4: Exercise 12.2 Complete Step-by-Step Solutions

खंड 4: प्रश्नावली 12.2 के संपूर्ण चरणबद्ध हल

Exercise 12.2 — Complete Solutions (Q1 to Q8) / प्रश्नावली 12.2 — संपूर्ण हल

[EN] Detailed solutions for Exercise 12.2 Q1 to Q8.

[HI] प्रश्नावली 12.2 के प्रश्न 1 से 8 तक के संपूर्ण हल:

- **Q1 (Cone on hemisphere, $r = 1 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$):** Volume = $(1/3)\pi r^2 h + (2/3)\pi r^3 = (1/3)\pi(1) + (2/3)\pi(1) = \pi \text{ cm}^3$.
- **Q2 (Rachel's Model: Cylinder + 2 Cones, $d = 3 \text{ cm}$, length = 12 cm, cone $h_1 = 2 \text{ cm}$):** $r = 1.5 \text{ cm}$, cylinder $h_2 = 12 - 4 = 8 \text{ cm}$.
Volume = $\pi r^2 h_2 + 2[(1/3)\pi r^2 h_1] = \pi(1.5)^2[8 + 4/3] = (22/7)(9/4)(28/3) = 66 \text{ cm}^3$.
- **Q3 (45 Gulab Jamuns, $L = 5 \text{ cm}$, $d = 2.8 \text{ cm} \Rightarrow r = 1.4 \text{ cm}$, cylinder $h = 2.2 \text{ cm}$):**
Volume of 1 = $\pi r^2 h + (4/3)\pi r^3 = 25.05 \text{ cm}^3$.
Sugar syrup (30%) in 45 = $0.30 \times 45 \times 25.05 = 338.18 \approx 338 \text{ cm}^3$.
- **Q4 (Pen stand cuboid $15 \times 10 \times 3.5 \text{ cm}$ with 4 conical depressions $r = 0.5 \text{ cm}$, $h = 1.4 \text{ cm}$):**
Volume of cuboid = 525 cm^3 . Volume of 4 cones = $4 \times (1/3)(22/7)(0.25)(1.4) = 1.47 \text{ cm}^3$.
Volume of wood = $525 - 1.47 = 523.53 \text{ cm}^3$.
- **Q5 (Inverted cone $h = 8 \text{ cm}$, $r = 5 \text{ cm}$; lead shots $r = 0.5 \text{ cm}$ displace $1/4$ water):**
Volume of cone = $(200/3)\pi \text{ cm}^3$. Volume displaced = $(50/3)\pi \text{ cm}^3$. Volume of 1 lead shot = $(4/3)\pi(0.5)^3 = (\pi/6) \text{ cm}^3$.
Number of lead shots = $[(50/3)\pi] / (\pi/6) = (50/3) \times 6 = 100$.
- **Q6 (Iron pole: lower cylinder $H_1=220$, $R_1=12$; upper $H_2=60$, $R_2=8$, $\pi=3.14$):**
Volume = $3.14[144(220) + 64(60)] = 3.14(31680 + 3840) = 111532.8 \text{ cm}^3$.
Mass = $111532.8 \times 8 \text{ g} = 892262.4 \text{ g} = 892.26 \text{ kg}$.
- **Q7 (Water left in cylinder — Fig 12.1 Right, Cylinder $R = 60$, $H = 180$):**
Water left = $\pi R^2 H - [(1/3)\pi r^2 h + (2/3)\pi r^3] = \pi(3600)[180 - (40 + 40)] = (22/7)(3600)(100) = 1131428.57 \text{ cm}^3$

= 1.131 m^3 (approx).

- **Q8 (Spherical vessel neck $h = 8 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$; sphere $d = 8.5 \text{ cm}$, $\pi = 3.14$):**

$$\text{Volume} = \pi(1)^2(8) + (4/3)\pi(4.25)^3 = 3.14[8 + 102.354] = \mathbf{346.51 \text{ cm}^3}.$$

Child's answer (345 cm^3) is **not correct**; correct volume is 346.51 cm^3 .

Final Answer / उत्तर: All 8 problems of Ex 12.2 solved and verified.

Section 5: Chapter Summary & Mensuration Master Table

खंड 5: अध्याय सारांश एवं क्षेत्रमिति की व्यापक सारणी

Solid	Curved Surface Area	Total Surface Area	Volume
Cylinder	$2\pi rh$	$2\pi r(r + h)$	$\pi r^2 h$
Cone	$\pi r l$ ($l = \sqrt{r^2 + h^2}$)	$\pi r(l + r)$	$(1/3)\pi r^2 h$
Hemisphere	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$(2/3)\pi r^3$
Sphere	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$(4/3)\pi r^3$

© TYBA Coaching Centre (टी वाई बी ए कोचिंग सेंटर) — All Rights Reserved. For Admissions, Regular Batch Coaching & Doubt Clearing Sessions, Contact: **6367029449**.