

TYBA COACHING CENTRE | टी वाई बी ए कोचिंग सेंटर

Contact / WhatsApp: 6367029449 • NCERT Class 10 Mathematics Complete Comprehensive Notes & Solutions

Chapter 10: Circles

अध्याय 10: वृत्त

Section 1: Detailed Concepts, Theorems & Formal Proofs

खंड 1: विस्तृत अवधारणाएँ, प्रमेय एवं संपूर्ण उपपत्तियाँ

10.1 Tangents to a Circle, Secant & Point of Contact / 10.1 वृत्त की स्पर्श रेखा, छेदक रेखा एवं स्पर्श बिंदु

[English Theory]: Consider a circle and a line in a plane. There are three possibilities:

1. **Non-intersecting Line:** The line and the circle have no common point.
 2. **Secant (छेदक रेखा):** The line intersects the circle in two distinct points.
 3. **Tangent (स्पर्श रेखा):** The line meets the circle at **only one point**. The word 'tangent' comes from the Latin word 'tangere', which means to touch.
- **Point of Contact (स्पर्श बिंदु):** The common point of the tangent and the circle.
 - **Crucial Property:** There is only one tangent at a point of the circle. A circle can have infinitely many tangents, but at most two parallel tangents in a given direction.

[हिंदी सिद्धांत]: एक तल में एक वृत्त और एक रेखा के लिए तीन स्थितियाँ संभव हैं:

1. **अप्रतिच्छेदी रेखा:** रेखा और वृत्त में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है।
 2. **छेदक रेखा (Secant):** रेखा वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर काटती है।
 3. **स्पर्श रेखा (Tangent):** रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है।
- **स्पर्श बिंदु (Point of Contact):** वृत्त और स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को स्पर्श बिंदु कहते हैं।
 - वृत्त के किसी एक बिंदु पर केवल एक ही स्पर्श रेखा होती है।

10.2 Theorem 10.1 (Radius is Perpendicular to Tangent at Point of Contact) / 10.2 प्रमेय 10.1 (स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है)

[English Theory]: **Theorem 10.1 Statement:** The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point of contact.

Given: A circle with centre O and a tangent XY to the circle at a point P.

To Prove: $OP \perp XY$.

Construction: Take a point Q on XY other than P and join OQ.

Proof:

The point Q must lie outside the circle (if Q were inside the circle, XY would become a secant and not a tangent to the circle).

Therefore, OQ is longer than the radius OP of the circle, i.e., $OQ > OP$.

Since this happens for every point on the line XY except the point P, **OP is the shortest distance** of all the distances of the point O to the points of XY.

Since the shortest distance of a point from a given line is the perpendicular distance, **$OP \perp XY$** . Hence Proved!

[हिंदी सिद्धांत]: **प्रमेय 10.1 का कथन:** वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

दिया है: केंद्र O वाला एक वृत्त और बिंदु P पर स्पर्श रेखा XY।

सिद्ध करना है: $OP \perp XY$ ।

रचना: रेखा XY पर P के अतिरिक्त कोई बिंदु Q लिया और OQ को मिलाया।

उपपत्ति: बिंदु Q वृत्त के बाहर होना चाहिए (यदि अंदर होता तो XY छेदक रेखा बन जाती)। अतः $OQ > OP$ ।

चूँकि बिंदु P के अतिरिक्त XY के प्रत्येक बिंदु के लिए $OQ > OP$ है, अतः OP केंद्र O से रेखा XY के बिंदुओं की न्यूनतम दूरी है।

न्यूनतम दूरी ही लंबवत दूरी होती है, अतः **$OP \perp XY$** । (इति सिद्धम्)

10.3 Number of Tangents from a Point & Theorem 10.2 (Equal Tangent Lengths) / 10.3 किसी बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की संख्या एवं प्रमेय 10.2

[English Theory]: • Case 1: Inside the circle $\Rightarrow$ No tangent can be drawn.

- Case 2: On the circle $\Rightarrow$ Exactly one tangent.
- Case 3: Outside the circle $\Rightarrow$ Exactly **two tangents**.

Theorem 10.2 Statement: The lengths of tangents drawn from an external point to a circle are equal.

Given: A circle with centre O, a point P lying outside the circle and two tangents PQ, PR on the circle from P.

To Prove: $PQ = PR$.

Construction: Join OP, OQ and OR.

Proof: $\angle OQP = \angle ORP = 90^\circ$ (Theorem 10.1).

In right triangles OQP and ORP:

- $OQ = OR$ (Radii of the same circle)
- $OP = OP$ (Common hypotenuse)

Therefore, by **RHS Congruence Criterion:** $\triangle OQP \cong \triangle ORP$.

By CPCT (Corresponding Parts of Congruent Triangles): **$PQ = PR$** . Hence Proved!

[हिंदी सिद्धांत]: • वृत्त के अंदर स्थित बिंदु से: कोई स्पर्श रेखा नहीं।

- वृत्त पर स्थित बिंदु से: ठीक एक स्पर्श रेखा।
- वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से: ठीक **दो स्पर्श रेखाएँ**।

प्रमेय 10.2 का कथन: बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

सिद्ध करना है: $PQ = PR$

रचना: OP, OQ और OR को मिलाया।

उपपत्ति: समकोण $\triangle OQP$ तथा $\triangle ORP$ में:

$OQ = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ), तथा कर्ण $OP = OP$ (उभयनिष्ठ)।

RHS सर्वांगसमता कसौटी से: **$\triangle OQP \cong \triangle ORP$** ।

CPCT से: **$PQ = PR$** । (इति सिद्धम्)

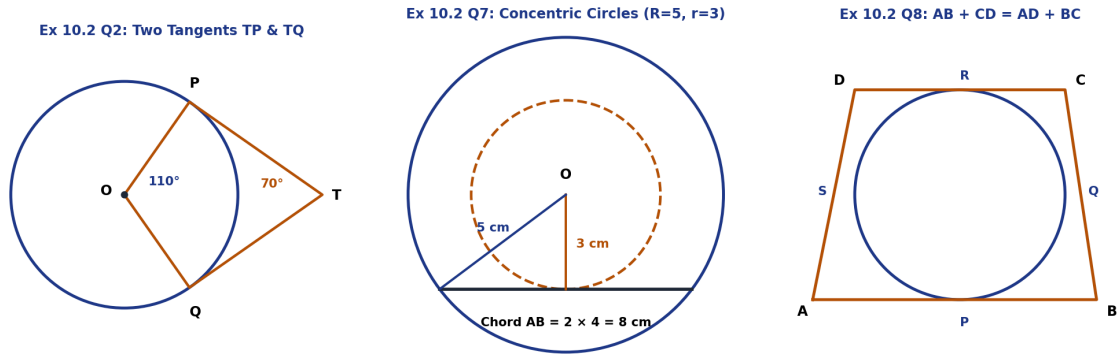


Fig 10.1: Circle & Tangent Geometry: Tangents TP and TQ (Ex 10.2 Q2), Concentric Circles (Ex 10.2 Q7), and Circumscribed Quadrilateral $AB+CD=AD+BC$ (Ex 10.2 Q8) — TYBA Coaching Centre

Section 2: Textbook Solved Examples with Step-by-Step Bilingual Solutions

खंड 2: पाठ्यपुस्तक के सभी हल किए गए उदाहरण (विस्तृत चरणबद्ध हल)

Textbook Example 1: Concentric Circles Tangent Chord Bisection / उदाहरण 1: संकेंद्रीय वृत्तों में स्पर्श जीवा का समद्विभाजन

[Problem - EN]: Prove that in two concentric circles, the chord of the larger circle, which touches the smaller circle, is bisected at the point of contact.

[प्रश्न - HI]: सिद्ध कीजिए कि दो संकेंद्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा, जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित होती है।

Step-by-Step Solution (English):

Given two concentric circles C_1 and C_2 with centre O and a chord AB of the larger circle C_1 touching the smaller circle C_2 at the point P.

To Prove: $AP = PB$.

Join OP.

AB is a tangent to C_2 at P and OP is its radius.

By Theorem 10.1: $OP \perp AB$.

Now AB is a chord of circle C_1 and $OP \perp AB$.

We know from Class IX that the perpendicular from the centre to a chord bisects the chord.

Therefore, **$AP = PB$** . Hence Proved!

चरणबद्ध हल (हिंदी):

दिया है: केंद्र O वाले दो संकेद्रीय वृत्त C_1 तथा C_2 , और बड़े वृत्त की जीवा AB छोटे वृत्त C_2 को P पर स्पर्श करती है।

रचना: OP को मिलाया।

प्रमेय 10.1 से: $OP \perp AB$ ।

कक्षा 9 के प्रमेय से, केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

अतः **$AP = PB$** । (इति सिद्धम्)

Textbook Example 2: Two Tangents TP & TQ: Prove $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ / उदाहरण 2: स्पर्श रेखाएँ TP व TQ: सिद्ध कीजिए $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

[Problem - EN]: Two tangents TP and TQ are drawn to a circle with centre O from an external point T. Prove that $\angle PTQ = 2\angle OPQ$.

[प्रश्न - HI]: केंद्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिंदु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ है।

Step-by-Step Solution (English):

Let $\angle PTQ = \theta$.

By Theorem 10.2, $TP = TQ \Rightarrow \triangle TPQ$ is an isosceles triangle.

Therefore, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \theta/2$.

By Theorem 10.1, $\angle OPT = 90^\circ$.

So, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - (90^\circ - \theta/2) = \theta/2 = \frac{1}{2}\angle PTQ$.

Therefore, **$\angle PTQ = 2\angle OPQ$** . Hence Proved!

चरणबद्ध हल (हिंदी):

माना $\angle PTQ = \theta$ । प्रमेय 10.2 से $TP = TQ$, अतः $\triangle TPQ$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

$\angle TPQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \theta/2$ ।

प्रमेय 10.1 से $\angle OPT = 90^\circ$ ।

अतः $\angle OPQ = 90^\circ - (90^\circ - \theta/2) = \theta/2 \Rightarrow \angle PTQ = 2\angle OPQ$ । (इति सिद्धम्)

Textbook Example 3: Chord PQ of Length 8 cm with Tangents Intersecting at T / उदाहरण 3: 8 cm लंबी जीवा PQ के स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु T

[Problem - EN]: PQ is a chord of length 8 cm of a circle of radius 5 cm. The tangents at P and Q intersect at a point T. Find the length TP.

[प्रश्न - HI]: 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त की 8 cm लंबी एक जीवा PQ है। P और Q पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर एक बिंदु T पर प्रतिच्छेद करती हैं। TP की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Step-by-Step Solution (English):

Join OT. Let it intersect PQ at point R. Then $\triangle TPQ$ is isosceles and TO is angle bisector of $\angle PTQ$, so $OT \perp PQ$ and bisects PQ.

So, $PR = RQ = 4$ cm.

In right $\triangle PRO$: $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ cm.

In right $\triangle TPR$ and $\triangle OPT$, $\angle TPR + \angle RPO = 90^\circ$ and $\angle ROT + \angle RPO = 90^\circ \Rightarrow \angle TPR = \angle ROT$.

Therefore, right $\triangle TRP \sim$ right $\triangle PRO$ (AA similarity).

$TP / PO = RP / RO \Rightarrow TP / 5 = 4 / 3 \Rightarrow TP = 20 / 3$ cm = **6.67 cm**.

चरणबद्ध हल (हिंदी):

OT को मिलाया जो PQ को R पर समद्विभाजित व लंबवत काटती है $\Rightarrow PR = 4$ cm।

समकोण $\triangle PRO$ में: $OR = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm।

समरूप त्रिभुज $\triangle TRP \sim \triangle PRO$ (AA कसौटी) से:

$TP / PO = RP / RO \Rightarrow TP / 5 = 4 / 3 \Rightarrow TP = 20/3$ cm (**6.67 cm**)।

Section 3: Exercise 10.1 & 10.2 Complete Step-by-Step Solutions

खंड 3: प्रश्नावली 10.1 एवं 10.2 के संपूर्ण चरणबद्ध हल

Exercise 10.1 — Complete Solutions (Q1 to Q4) / प्रश्नावली 10.1 — संपूर्ण हल

[EN] Q1: How many tangents can a circle have? Q2: Fill in the blanks. Q3: A tangent PQ at a point P of circle radius 5 cm meets line through O at Q ($OQ = 12$ cm). Length PQ is? Q4: Draw a circle and two parallel lines.

[HI] प्रश्नावली 10.1 के प्रश्न 1 से 4 के संपूर्ण हल:

- **Q1:** A circle has infinitely many points on its perimeter, and at each point exactly one tangent can be drawn. Therefore, a circle can have **infinitely many tangents (अपरिमित रूप से अनेक स्पर्श रेखाएँ)**.
- **Q2 (Fill in blanks):** (i) A tangent intersects a circle in **one (एक)** point • (ii) A line intersecting in two points is called a **secant (छेदक रेखा)** • (iii) A circle can have **two (दो)** parallel tangents at the most • (iv) The common point is called **point of contact (स्पर्श बिंदु)**.
- **Q3:** Radius $OP \perp$ tangent $PQ \Rightarrow \angle OPQ = 90^\circ$. In right $\triangle OPQ$: $PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{144 - 25} = \sqrt{119}$ cm (**Option D**).
- **Q4:** Given a line m and a circle with centre O. A line parallel to m at distance r touches the circle at one point (**tangent**); another line parallel to m at distance less than r intersects in two points (**secant**).

Final Answer / उत्तर: Q1: Infinitely many • Q2: one, secant, two, point of contact • Q3: Option D ($\sqrt{119}$ cm)

Exercise 10.2 — Complete Solutions & Proofs (Q1 to Q13) / प्रश्नावली 10.2 — संपूर्ण हल एवं उपपत्तियाँ

[EN] Detailed solutions and formal proofs for Exercise 10.2 Q1 to Q13.

[HI] प्रश्नावली 10.2 के प्रश्न 1 से 13 के संपूर्ण हल एवं उपपत्तियाँ:

- **Q1:** From point Q, tangent = 24 cm, distance from centre = 25 cm. Radius = $\sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{49} = 7$ cm (**Option A**).
- **Q2 (Fig 10.1 Left):** In quadrilateral OPTQ, $\angle OPT = \angle OQT = 90^\circ \Rightarrow \angle PTQ = 180^\circ - \angle POQ = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ (**Option B**).
- **Q3:** $\triangle POA \cong \triangle POB \Rightarrow \angle APO = 80^\circ / 2 = 40^\circ$. Since $\angle OAP = 90^\circ$, $\angle POA = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ (**Option A**).
- **Q4 (Tangents at ends of diameter are parallel):** Let AB be diameter. Tangents at A and B make alternate interior angles $\angle OAP = \angle OBS = 90^\circ$ with diameter AB. Hence, tangents are **parallel (समांतर)**.
- **Q5 (Perpendicular at point of contact passes through centre):** Since the radius through point of contact is perpendicular to tangent (Theorem 10.1) and only one perpendicular can be drawn at P, it must coincide with the radius and pass through centre O.
- **Q6:** Tangent from A is 4 cm, distance OA = 5 cm $\Rightarrow$ Radius $r = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm.

- **Q7 (Concentric Circles — Fig 10.1 Middle):** Radii 5 cm and 3 cm. Chord AB touches inner circle at P $\Rightarrow$ OP $\perp$ AB and bisects AB. AP = $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm $\Rightarrow$ **Chord AB = 2 $\times$ 4 = 8 cm.**
- **Q8 (Circumscribed Quadrilateral ABCD — Fig 10.1 Right):** Tangents from external points are equal: AP = AS, BP = BQ, CR = CQ, DR = DS. Adding all four gives: (AP + BP) + (CR + DR) = (AS + DS) + (BQ + CQ) $\Rightarrow$ **AB + CD = AD + BC. Hence Proved!**
- **Q9 (Parallel Tangents XY & X'Y' with AB):** In right triangles OAP & OAC: $\angle POA = \angle COA$. Similarly $\angle QOB = \angle COB$. Since POQ is a diameter: $2(\angle COA + \angle COB) = 180^\circ \Rightarrow$ **$\angle AOB = 90^\circ$. Hence Proved!**
- **Q10 (Supplementary Angle):** In quadrilateral PAOB, $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$. Sum of angles = $360^\circ \Rightarrow$ **$\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$ (Supplementary). Hence Proved!**
- **Q11 (Parallelogram Circumscribing a Circle is a Rhombus):** AB + CD = AD + BC (from Q8). In parallelogram, AB = CD and AD = BC $\Rightarrow$ 2AB = 2AD $\Rightarrow$ AB = AD. All 4 sides equal $\Rightarrow$ **ABCD is a rhombus.**
- **Q12 ($\triangle ABC$ circumscribing circle $r = 4$ cm, BD = 8 cm, DC = 6 cm):** Let AE = AF = x cm. Sides: a = 14, b = x + 6, c = x + 8; s = x + 14. Area by Heron's formula = $\sqrt{48x(x + 14)}$. Area by incircle = $4(x + 14)$. Equating: $48x(x + 14) = 16(x + 14)^2 \Rightarrow 3x = x + 14 \Rightarrow$ **x = 7 cm.** Thus **AB = 7 + 8 = 15 cm, AC = 7 + 6 = 13 cm.**
- **Q13 (Opposite Sides Subtend Supplementary Angles at O):** Tangents from each vertex subtend equal angles at centre O. $2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) = 360^\circ \Rightarrow$ **$\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$ and $\angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$. Hence Proved!**

Final Answer / उत्तर: All questions and proofs of Ex 10.2 completed.

Section 4: Chapter Summary & Key Circle Theorems

खंड 4: अध्याय सारांश एवं प्रमुख प्रमेय

Theorem	Key Mathematical Property	विवरण (हिंदी)
Theorem 10.1	Radius $\perp$ Tangent (OP $\perp$ XY)	स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब होती है
Theorem 10.2	Tangents from external point are equal (PQ = PR)	बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं
Circumscribed Quad	AB + CD = AD + BC	परिगत चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का योग समान होता है

© TYBA Coaching Centre (टी वाई बी ए कोचिंग सेंटर) — All Rights Reserved. For Admissions, Regular Batch Coaching & Doubt Clearing Sessions, Contact: **6367029449**.