

TYBA COACHING CENTRE | टी वाई बी ए कोचिंग सेंटर

Contact / WhatsApp: 6367029449 • NCERT Class 10 Mathematics Complete Comprehensive Notes & Solutions

Chapter 1: Real Numbers

अध्याय 1: वास्तविक संख्याएँ

Section 1: Detailed Concepts, Definitions & Theorems

खंड 1: विस्तृत अवधारणाएँ, परिभाषाएँ एवं प्रमेय

1.1 Introduction & Real Number System / 1.1 भूमिका एवं वास्तविक संख्या पद्धति

[English Theory]: In Class IX, we explored rational numbers and irrational numbers. Together, rational and irrational numbers form the complete system of **Real Numbers (R)**. A rational number can be expressed in the form p/q , where p and q are integers and $q \neq 0$. Its decimal expansion is either terminating or non-terminating repeating (recurring). An irrational number cannot be written as p/q ; its decimal expansion is non-terminating and non-repeating. In Class X, we explore two fundamental properties of positive integers: the Fundamental Theorem of Arithmetic and the proof of irrationality of square roots of prime numbers.

[हिंदी सिद्धांत]: कक्षा 9 में हमने परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का अध्ययन किया था। परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ मिलकर **वास्तविक संख्याएँ (R)** बनाती हैं। वह संख्या जिसे p/q के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$, परिमेय संख्या कहलाती है। इसका दशमलव प्रसार या तो शांत होता है या अशांत आवर्ती। अपरिमेय संख्या को p/q के रूप में नहीं लिखा जा सकता; इसका दशमलव प्रसार अशांत अनावर्ती होता है। कक्षा 10 में हम धनात्मक पूर्णांकों के दो अत्यंत महत्वपूर्ण गुणों का अध्ययन करेंगे: अंकगणित की आधारभूत प्रमेय तथा अभाज्य संख्याओं के वर्गमूलों की अपरिमेयता का प्रमाण।

1.2 The Fundamental Theorem of Arithmetic (Theorem 1.1) / 1.2 अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (प्रमेय 1.1)

[English Theory]: Theorem 1.1 Statement: Every composite number can be expressed (factorised) as a product of primes, and this factorisation is unique, apart from the order in which the prime factors occur.

In general, given a composite number x , we factorise it as $x = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$, where $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ are primes written in ascending order.

Historical Context: This fundamental property was first recorded in Euclid's *Elements* (Book IX, Proposition 14) and was formally proved by Carl Friedrich Gauss in *Disquisitiones Arithmeticae* (1801).

Significance: It establishes that prime numbers are the fundamental 'building blocks' of all positive integers.

[हिंदी सिद्धांत]: प्रमेय 1.1 का कथन: प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

व्यापक रूप में, किसी भाज्य संख्या x के लिए, $x = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$, जहाँ अभाज्य गुणनखंड आरोही क्रम $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ में लिखे जाते हैं।

ऐतिहासिक संदर्भ: यह प्रमेय सर्वप्रथम यूक्लिड की *एलिमेंट्स* (पुस्तक IX, साध्य 14) में उल्लेखित था तथा इसका विधिवत प्रमाण कार्ल फ्रेडरिक गॉस ने अपनी प्रसिद्ध कृति *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) में दिया था।

महत्व: यह सिद्ध करता है कि अभाज्य संख्याएँ सभी धनात्मक पूर्णांकों की आधारभूत 'ईंटें' (मूल तत्व) हैं।

Relationship Between HCF and LCM for Two Positive Integers / दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF एवं LCM के बीच संबंध

[English Theory]: For any two positive integers a and b :

- **HCF(a, b) = Product of the smallest power of each common prime factor involved in the numbers.**
- **LCM(a, b) = Product of the greatest power of each prime factor involved in the numbers.**
- **Fundamental Identity: $\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$.**

Important Examination Warning: This product relation holds strictly for **two** integers only. For three positive integers p, q, r : $\text{HCF}(p, q, r) \times \text{LCM}(p, q, r) \neq p \times q \times r$ in general!

[हिंदी सिद्धांत]: किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए:

- **$\text{HCF}(a, b)$ = संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घात का गुणनफल।**

• **LCM(a, b) = संख्याओं में संबद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल।**

• **महत्वपूर्ण सूत्र: $HCF(a, b) \times LCM(a, b) = a \times b$ (दोनों संख्याओं का गुणनफल)।**

परीक्षा उपयोगी चेतावनी: यह नियम केवल दो संख्याओं के लिए ही सत्य है। तीन संख्याओं p, q, r के लिए $HCF(p, q, r) \times LCM(p, q, r) \neq p \times q \times r$ होता है।

1.3 Revisiting Irrational Numbers & Divisibility Theorem (Theorem 1.2) / 1.3 अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण एवं विभाज्यता प्रमेय (प्रमेय 1.2)

[English Theory]: Theorem 1.2: Let p be a prime number. If p divides a^2 , then p divides a , where a is a positive integer.

Proof Outline: Let prime factorisation of a be $a = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$. Then $a^2 = (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k)^2 = p_1^2 \times p_2^2 \times \dots \times p_k^2$. By the uniqueness of the Fundamental Theorem of Arithmetic, the only prime factors of a^2 are $p_1, p_2, \dots, p_k$. Since p divides a^2 , p must be one of $p_1, p_2, \dots, p_k$. Because $a = p_1 \times \dots \times p_k$, p divides a .

Theorem 1.3: $\sqrt{2}$ is irrational.

Theorem 1.4: $\sqrt{3}$ is irrational, and more generally, $\sqrt{p}$ is irrational for any prime p .

Properties of Operations on Rational & Irrational Numbers:

1. The sum or difference of a rational number and an irrational number is always irrational.
2. The product or quotient of a non-zero rational number and an irrational number is always irrational.

[हिंदी सिद्धांत]: प्रमेय 1.2: मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करती है, तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

उपपत्ति (प्रमाण): माना a का अभाज्य गुणनखंड $a = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$ है। तब $a^2 = p_1^2 \times p_2^2 \times \dots \times p_k^2$ होगा। अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता से a^2 के अभाज्य गुणनखंड केवल $p_1, p_2, \dots, p_k$ ही हैं। चूँकि p, a^2 को विभाजित करता है, अतः p को $p_1, \dots, p_k$ में से ही कोई एक होना चाहिए। अतः p, a को भी विभाजित करता है।

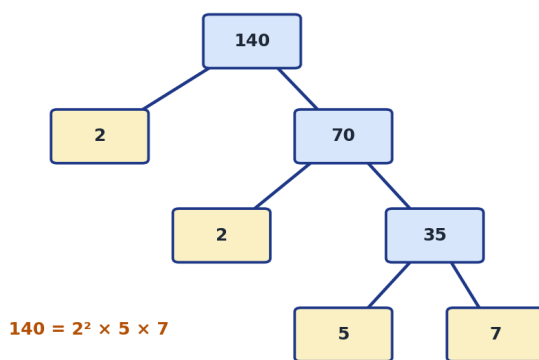
प्रमेय 1.3: $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमेय 1.4: $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है, तथा किसी भी अभाज्य p के लिए $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या होती है।

परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के संक्रिया नियम:

1. एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर सदैव अपरिमेय होता है।
2. एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल सदैव अपरिमेय होता है।

Ex 1.1 Q1(i): Prime Factor Tree of 140



Ex 1.1 Q7: Circular Sports Field (LCM = 36 min)



Fig 1.1: Prime Factor Tree Structure ($140 = 2^2 \times 5 \times 7$) and Circular Sports Track LCM Meeting Point Model (Ex 1.1 Q7) — TYBA Coaching Centre

Section 2: Textbook Solved Examples with Step-by-Step Bilingual Solutions

खंड 2: पाठ्यपुस्तक के सभी हल किए गए उदाहरण (विस्तृत चरणबद्ध हल)

Textbook Example 1: Ending with Digit 0 / उदाहरण 1: अंक 0 पर समाप्त होना

[Problem - EN]: Consider the numbers 4^n , where n is a natural number. Check whether there is any value of n for which 4^n ends with the digit zero.

[प्रश्न - HI]: संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

Step-by-Step Solution (English):

If the number 4^n , for any natural number n , were to end with the digit zero, then it would be divisible by 5. That is, the prime factorisation of 4^n would contain the prime 5.

This is not possible because $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$; so the only prime factor in the factorisation of 4^n is 2.

By the uniqueness of the Fundamental Theorem of Arithmetic, there are no other prime factors in the factorisation of 4^n . So, there is no natural number n for which 4^n ends with the digit zero.

चरणबद्ध हल (हिंदी):

यदि किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होती, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती। अर्थात् 4^n के अभाज्य गुणखंडन में अभाज्य संख्या 5 अवश्य आती।

परंतु यह संभव नहीं है क्योंकि $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$ है; अर्थात् 4^n के अभाज्य गुणखंडन में केवल अभाज्य संख्या 2 ही आ सकती है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह आश्वस्त करती है कि 4^n के गुणखंडन में 2 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणखंड नहीं है।

अतः ऐसी कोई प्राकृत संख्या n नहीं है जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त हो सके।

Textbook Example 2: HCF and LCM of 6 and 20 / उदाहरण 2: 6 और 20 के HCF तथा LCM

[Problem - EN]: Find the LCM and HCF of 6 and 20 by the prime factorisation method.

[प्रश्न - HI]: अभाज्य गुणखंडन विधि द्वारा 6 और 20 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

Step-by-Step Solution (English):

Step 1: Write prime factorisation of both numbers:

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$$

Step 2: Calculate HCF: Product of the smallest power of each common prime factor involved = $2^1 = 2$.

Step 3: Calculate LCM: Product of the greatest power of each prime factor involved = $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 4 \times 3 \times 5 = 60$.

Check: $HCF \times LCM = 2 \times 60 = 120 = 6 \times 20$ (Product of numbers).

चरणबद्ध हल (हिंदी):

चरण 1: दोनों संख्याओं का अभाज्य गुणखंडन करने पर:

$$6 = 2^1 \times 3^1$$

$$20 = 2^2 \times 5^1$$

चरण 2: HCF की गणना: उभयनिष्ठ अभाज्य गुणखंड की सबसे छोटी घात = $2^1 = 2$ ।

चरण 3: LCM की गणना: संबद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणखंड की सबसे बड़ी घात = $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 4 \times 3 \times 5 = 60$ ।

जाँच: $HCF \times LCM = 2 \times 60 = 120 = 6 \times 20$ (संख्याओं का गुणफल)।

Textbook Example 3: HCF and LCM of 96 and 404 / उदाहरण 3: 96 और 404 के HCF तथा LCM

[Problem - EN]: Find the HCF of 96 and 404 by the prime factorisation method. Hence, find their LCM.

[प्रश्न - HI]: अभाज्य गुणखंडन विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

Step-by-Step Solution (English):

Prime factorisation:

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$$

$$404 = 2 \times 2 \times 101 = 2^2 \times 101$$

Therefore, **HCF(96, 404) = $2^2 = 4$.**

Now using the relation $LCM \times HCF = a \times b$:

$$LCM(96, 404) = (96 \times 404) / HCF = (96 \times 404) / 4 = 96 \times 101 = \mathbf{9696}.$$

चरणबद्ध हल (हिंदी):

अभाज्य गुणनखंडन:

$$96 = 2^5 \times 3$$

$$404 = 2^2 \times 101$$

$$\text{अतः } \mathbf{HCF(96, 404) = 2^2 = 4।}$$

अब सूत्र $LCM \times HCF = a \times b$ का प्रयोग करने पर:

$$LCM(96, 404) = (96 \times 404) / 4 = 96 \times 101 = \mathbf{9696।}$$

Textbook Example 4: HCF and LCM of Three Numbers (6, 72, 120) / उदाहरण 4: तीन संख्याओं (6, 72, 120) के HCF और LCM

[Problem - EN]: Find the HCF and LCM of 6, 72 and 120, using the prime factorisation method.

[प्रश्न - HI]: संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

Step-by-Step Solution (English):

Prime factorisations:

$$6 = 2 \times 3$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Common prime factors with smallest powers: 2^1 and 3^1 .

$$\Rightarrow \mathbf{HCF(6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 6.}$$

Highest powers of all prime factors involved: $2^3, 3^2, 5^1$.

$$\Rightarrow \mathbf{LCM(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 = 360.}$$

Remark: Notice that $6 \times 72 \times 120 = 51840$, but $HCF \times LCM = 6 \times 360 = 2160 \neq 51840$! The product rule does not apply to 3 numbers.

चरणबद्ध हल (हिंदी):

अभाज्य गुणनखंडन:

$$6 = 2 \times 3$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

उभयनिष्ठ गुणनखंडों की न्यूनतम घात: 2^1 तथा $3^1 \Rightarrow \mathbf{HCF = 2 \times 3 = 6।}$

सभी अभाज्य गुणनखंडों की अधिकतम घात: $2^3, 3^2, 5^1 \Rightarrow \mathbf{LCM = 8 \times 9 \times 5 = 360।}$

विशेष टिप्पणी: $6 \times 72 \times 120 = 51840$, जबकि $HCF \times LCM = 2160 \neq 51840$ । तीन संख्याओं पर गुणनफल सूत्र लागू नहीं होता।

Textbook Example 5: Proof of Irrationality of $\sqrt{3}$ / उदाहरण 5: $\sqrt{3}$ की अपरिम्यता का प्रमाण

[Problem - EN]: Prove that $\sqrt{3}$ is irrational.

[प्रश्न - HI]: सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिम्य संख्या है।

Step-by-Step Solution (English):

Let us assume, to the contrary, that $\sqrt{3}$ is rational.

Then there exist co-prime integers a and b (where $b \neq 0$) such that $\sqrt{3} = a/b$.

Rearranging and squaring both sides: $3b^2 = a^2$ —(Equation 1).

Therefore, 3 divides a^2 . By Theorem 1.2, **3 divides a .**

So we can write $a = 3c$ for some integer c .

Substituting $a = 3c$ in Equation 1 gives: $3b^2 = (3c)^2 = 9c^2 \Rightarrow b^2 = 3c^2$.

This means that 3 divides b^2 , and so **3 divides b** .

Therefore, a and b have at least 3 as a common factor. But this contradicts the fact that a and b are co-prime. This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $\sqrt{3}$ is rational. Hence, **$\sqrt{3}$ is irrational.**

चरणबद्ध हल (हिंदी):

मान लीजिए इसके विपरीत कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

तब हम सह-अभाज्य पूर्णांक a और b (जहाँ $b \neq 0$) ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि $\sqrt{3} = a/b$ ।

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर: $3b^2 = a^2$ —(समीकरण 1)।

अतः 3, a^2 को विभाजित करता है। इसलिए प्रमेय 1.2 से **3, a को भी विभाजित करेगा।**

अब हम $a = 3c$ लिख सकते हैं (जहाँ c कोई पूर्णांक है)।

समीकरण 1 में मान रखने पर: $3b^2 = 9c^2 \Rightarrow b^2 = 3c^2$ ।

अर्थात् 3, b^2 को विभाजित करता है, इसलिए **3, b को भी विभाजित करेगा।**

अतः a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 है। परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सह-अभाज्य हैं।

यह विरोधाभास हमारी गलत कल्पना के कारण हुआ है कि $\sqrt{3}$ परिमेय है। अतः **$\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।**

Textbook Example 6: Proof for $5 - \sqrt{3}$ / उदाहरण 6: $5 - \sqrt{3}$ की अपरिमेयता का प्रमाण

[Problem - EN]: Show that $5 - \sqrt{3}$ is irrational.

[प्रश्न - HI]: दर्शाइए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Step-by-Step Solution (English):

Assume to the contrary that $5 - \sqrt{3}$ is rational.

Then $5 - \sqrt{3} = a/b$, where a and b are co-prime integers and $b \neq 0$.

Rearranging: $\sqrt{3} = 5 - a/b = (5b - a) / b$.

Since a and b are integers, $(5b - a)/b$ is a rational number, which implies that $\sqrt{3}$ is rational.

But this contradicts the fact that $\sqrt{3}$ is irrational. Hence, **$5 - \sqrt{3}$ is irrational.**

चरणबद्ध हल (हिंदी):

मान लीजिए इसके विपरीत कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

तब $5 - \sqrt{3} = a/b$, जहाँ a और b सह-अभाज्य पूर्णांक हैं ($b \neq 0$)।

पक्षांतरण करने पर: $\sqrt{3} = 5 - a/b = (5b - a) / b$ ।

चूँकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $(5b - a)/b$ एक परिमेय संख्या है, जिससे $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है।

परंतु यह इस तथ्य का विरोधाभास करता है कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय है। अतः **$5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।**

Textbook Example 7: Proof for $3\sqrt{2}$ / उदाहरण 7: $3\sqrt{2}$ की अपरिमेयता का प्रमाण

[Problem - EN]: Show that $3\sqrt{2}$ is irrational.

[प्रश्न - HI]: दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Step-by-Step Solution (English):

Assume to the contrary that $3\sqrt{2}$ is rational: $3\sqrt{2} = a/b$ (where a, b are integers, co-prime, $b \neq 0$).

Rearranging: $\sqrt{2} = a / (3b)$.

Since a, b are integers and $3 \neq 0$, $a/(3b)$ is rational, which means $\sqrt{2}$ is rational.

This contradicts the established fact that $\sqrt{2}$ is irrational. Hence, **$3\sqrt{2}$ is irrational.**

चरणबद्ध हल (हिंदी):

मान लीजिए इसके विपरीत कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है: $3\sqrt{2} = a/b$ (जहाँ a, b सह-अभाज्य पूर्णांक हैं, $b \neq 0$)।

पक्षांतरण करने पर: $\sqrt{2} = a / (3b)$ ।

चूँकि a, b पूर्णांक हैं, अतः $a/(3b)$ परिमेय संख्या है, जिससे $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या होनी चाहिए।

परंतु यह इस सर्वविदित सत्य का विरोधाभास है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है। अतः **$3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।**

Section 3: Exercise 1.1 Complete Step-by-Step Solutions

खंड 3: प्रश्नावली 1.1 के संपूर्ण चरणबद्ध हल

Exercise 1.1 — Question 1 / प्रश्नावली 1.1 — प्रश्न 1

[EN] Express each number as a product of its prime factors: (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

[HI] निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए: (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

[EN] Detailed Prime Factorisation Process:

- **(i) 140:** 140 is even $\Rightarrow 140 \div 2 = 70$; $70 \div 2 = 35$; $35 \div 5 = 7$; $7 \div 7 = 1$.
Therefore: $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$.
- **(ii) 156:** 156 is even $\Rightarrow 156 \div 2 = 78$; $78 \div 2 = 39$; $39 \div 3 = 13$; $13 \div 13 = 1$.
Therefore: $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$.
- **(iii) 3825:** Sum of digits = $3+8+2+5 = 18$ (divisible by 3) $\Rightarrow 3825 \div 3 = 1275$; $1+2+7+5 = 15 \Rightarrow 1275 \div 3 = 425$; $425 \div 5 = 85$; $85 \div 5 = 17$; $17 \div 17 = 1$.
Therefore: $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 3^2 \times 5^2 \times 17$.
- **(iv) 5005:** Ends in 5 $\Rightarrow 5005 \div 5 = 1001$. Testing primes: $1001 \div 7 = 143$; $143 \div 11 = 13$; $13 \div 13 = 1$.
Therefore: $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$.
- **(v) 7429:** Testing prime divisors: $7429 \div 17 = 437$; $437 \div 19 = 23$; $23 \div 23 = 1$.
Therefore: $7429 = 17 \times 19 \times 23$.

[HI] हिंदी में चरणबद्ध अभाज्य गुणनखंडन:

- (i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$
- (ii) $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$
- (iii) $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 3^2 \times 5^2 \times 17$
- (iv) $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$
- (v) $7429 = 17 \times 19 \times 23$

Final Answer / उत्तर: (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$ (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

Exercise 1.1 — Question 2 / प्रश्नावली 1.1 — प्रश्न 2

[EN] Find the LCM and HCF of the following pairs of integers and verify that $\text{LCM} \times \text{HCF} = \text{product of the two numbers}$: (i) 26 and 91 (ii) 510 and 92 (iii) 336 and 54

[HI] पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = $\text{HCF} \times \text{LCM}$ है: (i) 26 और 91 (ii) 510 और 92 (iii) 336 और 54

(i) 26 and 91 / 26 और 91:

- **[EN]** $26 = 2 \times 13$; $91 = 7 \times 13$.
Common factor with smallest power: **HCF = 13**.
Highest powers of all factors: **LCM = $2 \times 7 \times 13 = 182$** .
Verification: $\text{LCM} \times \text{HCF} = 182 \times 13 = 2366$.
Product of numbers = $26 \times 91 = 2366$.
Hence, **LCM $\times$ HCF = Product of numbers (Verified)**.
- **[HI]** $26 = 2 \times 13$ तथा $91 = 7 \times 13$ । उभयनिष्ठ गुणनखंड: **HCF = 13**; **LCM = $2 \times 7 \times 13 = 182$** ।
सत्यापन: $\text{LCM} \times \text{HCF} = 182 \times 13 = 2366$; दोनों संख्याओं का गुणनफल = $26 \times 91 = 2366$ । दोनों बराबर हैं (सत्यापित)।

(ii) 510 and 92 / 510 और 92:

- **[EN]** $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$; $92 = 2^2 \times 23$.

HCF = $2^1 = 2$.

LCM = $2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 4 \times 15 \times 391 = 23460$.

Verification: $\text{LCM} \times \text{HCF} = 23460 \times 2 = 46920$; Product = $510 \times 92 = 46920$. Verified.

- **[HI]** $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$ तथा $92 = 2^2 \times 23$ ।

अतः **HCF = 2** तथा **LCM = 23460**।

सत्यापन: $23460 \times 2 = 46920 = 510 \times 92$ (सत्यापित)।

(iii) 336 and 54 / 336 और 54:

- **[EN]** $336 = 2^4 \times 3 \times 7$; $54 = 2 \times 3^3$.

HCF = $2^1 \times 3^1 = 6$.

LCM = $2^4 \times 3^3 \times 7 = 16 \times 27 \times 7 = 3024$.

Verification: $\text{LCM} \times \text{HCF} = 3024 \times 6 = 18144$; Product = $336 \times 54 = 18144$. Verified.

- **[HI]** $336 = 2^4 \times 3 \times 7$ तथा $54 = 2 \times 3^3$ ।

अतः **HCF = 6** तथा **LCM = 3024**।

सत्यापन: $3024 \times 6 = 18144 = 336 \times 54$ (सत्यापित)।

Final Answer / उत्तर: (i) LCM = 182, HCF = 13 (ii) LCM = 23460, HCF = 2 (iii) LCM = 3024, HCF = 6

Exercise 1.1 — Question 3 / प्रश्नावली 1.1 — प्रश्न 3

[EN] Find the LCM and HCF of the following integers by applying the prime factorisation method: (i) 12, 15 and 21 (ii) 17, 23 and 29 (iii) 8, 9 and 25

[HI] अभ्यास गुणनखंडन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए: (i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29 (iii) 8, 9 और 25

- **(i) 12, 15 and 21:**

$12 = 2^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$; $21 = 3 \times 7$.

Common factor: $3 \Rightarrow \text{HCF} = 3$.

All prime factors with highest powers: $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow \text{LCM} = 420$.

- **(ii) 17, 23 and 29:**

All three numbers 17, 23, and 29 are prime numbers.

Therefore, **HCF = 1**.

LCM = $17 \times 23 \times 29 = 11339$.

- **(iii) 8, 9 and 25:**

$8 = 2^3$; $9 = 3^2$; $25 = 5^2$.

No common prime factor among all three $\Rightarrow \text{HCF} = 1$.

LCM = $2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 8 \times 9 \times 25 = 1800$.

Final Answer / उत्तर: (i) LCM = 420, HCF = 3 (ii) LCM = 11339, HCF = 1 (iii) LCM = 1800, HCF = 1

Exercise 1.1 — Question 4, 5, 6 & 7 / प्रश्नावली 1.1 — प्रश्न 4, 5, 6 एवं 7

[EN] Q4: Given $\text{HCF}(306, 657) = 9$, find $\text{LCM}(306, 657)$.

Q5: Check whether 6^n can end with the digit 0 for any natural number n .

Q6: Explain why $7 \times 11 \times 13 + 13$ and $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ are composite numbers.

Q7: There is a circular path around a sports field. Sonia takes 18 minutes to drive one round of the field, while Ravi takes 12 minutes for the same. After how many minutes will they meet again at the starting point?

[HI] प्रश्न 4: $HCF(306, 657) = 9$ दिया है। $LCM(306, 657)$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5: जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

प्रश्न 6: व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं।

प्रश्न 7: किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। सोनिया को 18 मिनट तथा रवि को 12 मिनट लगते हैं। वे कितने मिनट बाद पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

Detailed Solution for Q4 (प्रश्न 4 का हल):

Formula: $LCM(a, b) = (a \times b) / HCF(a, b)$.

$LCM(306, 657) = (306 \times 657) / 9 = 34 \times 657 = 22338$.

Detailed Solution for Q5 (प्रश्न 5 का हल):

[EN] If 6^n were to end with digit 0 for any natural number n , it must be divisible by 10 (i.e. both 2 and 5). Thus, its prime factorisation must contain 5.

However, $6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$. The only prime factors are 2 and 3. By the uniqueness of the Fundamental Theorem of Arithmetic, 5 cannot occur in the prime factorisation of 6^n . Hence, **6^n can never end with the digit 0** for any natural number n .

[HI] यदि 6^n अंक 0 पर समाप्त होती, तो वह 5 से विभाज्य होती। परंतु $6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ में केवल 2 और 3 ही अभाज्य गुणनखंड हैं। अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता से 5 इसका गुणनखंड नहीं हो सकता। अतः किसी भी प्राकृत संख्या n के लिए **6^n अंक 0 पर समाप्त नहीं हो सकती।**

Detailed Solution for Q6 (प्रश्न 6 का हल):

[EN/HI] Expression 1: $7 \times 11 \times 13 + 13 = 13(7 \times 11 + 1) = 13(77 + 1) = 13 \times 78 = 13 \times 13 \times 2 \times 3$.

Since it has prime factors other than 1 and itself, it is a **composite number (भाज्य संख्या)**.

Expression 2: $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5 = 5(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1) = 5(1008 + 1) = 5 \times 1009$.

Since it can be expressed as product of two factors greater than 1 (5 and 1009), it is also a **composite number (भाज्य संख्या)**.

Detailed Solution for Q7 (प्रश्न 7 का हल — See Fig 1.1 Right):

[EN/HI] Both start together in the same direction. They will meet again at the starting point after a time equal to the **LCM of 18 and 12 minutes**.

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$LCM(18, 12) = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36 \text{ minutes.}$$

During this time, Sonia completes $36/18 = 2$ rounds and Ravi completes $36/12 = 3$ rounds.

Final Answer / उत्तर: Q4: 22338 • Q5: No, 6^n cannot end in 0 • Q6: Both are composite • Q7: 36 minutes

Section 4: Exercise 1.2 Complete Step-by-Step Solutions

खंड 4: प्रश्नावली 1.2 के संपूर्ण चरणबद्ध हल

Exercise 1.2 — Question 1 / प्रश्नावली 1.2 — प्रश्न 1

[EN] Prove that $\sqrt{5}$ is irrational.

[HI] सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

[EN] Complete Proof by Contradiction:

Let us assume, to the contrary, that $\sqrt{5}$ is rational.

Then we can find integers a and b (where $b \neq 0$) such that $\sqrt{5} = a/b$.

Suppose a and b have a common factor other than 1. Then we divide by the common factor to assume that a and b are **co-prime** ($HCF(a, b) = 1$).

So, $b\sqrt{5} = a$.

Squaring both sides, we get: $5b^2 = a^2$ —(Equation 1).

Therefore, 5 divides a^2 .

Now, by Theorem 1.2, it follows that **5 divides a**.

So, we can write $a = 5c$ for some integer c.

Substituting for a in Equation 1, we get: $5b^2 = (5c)^2 = 25c^2 \Rightarrow b^2 = 5c^2$.

This means that 5 divides b^2 , and so **5 divides b** (again using Theorem 1.2).

Therefore, a and b have at least 5 as a common factor.

But this contradicts the fact that a and b are co-prime.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $\sqrt{5}$ is rational.

Hence, we conclude that **$\sqrt{5}$ is irrational**.

[HI] विरोधाभास द्वारा संपूर्ण उपपत्ति (प्रमाण):

मान लीजिए इसके विपरीत कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

तब हम दो सह-अभाज्य पूर्णांक a और b ($b \neq 0$) ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि $\sqrt{5} = a/b$ ।

पक्षांतरण करने पर: $b\sqrt{5} = a$ ।

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर: $5b^2 = a^2$ —(समीकरण 1)।

अतः 5, a^2 को विभाजित करता है। इसलिए प्रमेय 1.2 से **5, a को भी विभाजित करेगा**।

अब हम $a = 5c$ लिख सकते हैं (जहाँ c कोई पूर्णांक है)।

समीकरण 1 में a का मान रखने पर: $5b^2 = 25c^2 \Rightarrow b^2 = 5c^2$ ।

अर्थात् 5, b^2 को विभाजित करता है, अतः **5, b को भी विभाजित करेगा**।

इस प्रकार a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सह-अभाज्य हैं।

यह विरोधाभास हमारी गलत कल्पना के कारण उत्पन्न हुआ है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि **$\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है**। (इति सिद्धम्)

Final Answer / उत्तर: Hence Proved: $\sqrt{5}$ is irrational / इति सिद्धम्: $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

Exercise 1.2 — Question 2 / प्रश्नावली 1.2 — प्रश्न 2

[EN] Prove that $3 + 2\sqrt{5}$ is irrational.

[HI] सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

[EN] Proof:

Let us assume, to the contrary, that $3 + 2\sqrt{5}$ is rational.

That is, we can find co-prime integers a and b ($b \neq 0$) such that $3 + 2\sqrt{5} = a/b$.

Rearranging the equation:

$$2\sqrt{5} = a/b - 3 = (a - 3b) / b \Rightarrow \sqrt{5} = (a - 3b) / (2b).$$

Since a and b are integers, $(a - 3b) / (2b)$ is a rational number.

This implies that $\sqrt{5}$ is rational.

But this contradicts the fact that $\sqrt{5}$ is irrational.

This contradiction has arisen because of our incorrect assumption that $3 + 2\sqrt{5}$ is rational.

So, we conclude that **$3 + 2\sqrt{5}$ is irrational**.

[HI] उपपत्ति:

मान लीजिए इसके विपरीत कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

तब $3 + 2\sqrt{5} = a/b$, जहाँ a और b सह-अभाज्य पूर्णांक हैं तथा $b \neq 0$ है।

$$2\sqrt{5} = (a/b) - 3 = (a - 3b) / b \Rightarrow \sqrt{5} = (a - 3b) / (2b)।$$

चूँकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $(a - 3b)/(2b)$ एक परिमेय संख्या है, जिससे $\sqrt{5}$ भी परिमेय संख्या सिद्ध होती है।

परंतु यह इस तथ्य का विरोधाभास है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः हमारी कल्पना असत्य है और **$3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है**। (इति सिद्धम्)

Final Answer / उत्तर: Hence Proved: $3 + 2\sqrt{5}$ is irrational / इति सिद्धम्: $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है।

Exercise 1.2 — Question 3 / प्रश्नावली 1.2 — प्रश्न 3

[EN] Prove that the following are irrationals: (i) $1/\sqrt{2}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

[HI] सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं: (i) $1/\sqrt{2}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

(i) $1/\sqrt{2}$:

[EN] Assume $1/\sqrt{2} = a/b$ (where a, b are non-zero co-prime integers). Then $\sqrt{2} = b/a$. Since a and b are integers, b/a is rational, which means $\sqrt{2}$ is rational. This contradicts the established fact that $\sqrt{2}$ is irrational. Hence, **$1/\sqrt{2}$ is irrational.**

[HI] माना $1/\sqrt{2} = a/b$ (परिमेय) जहाँ a, b शून्येतर सह-अभाज्य पूर्णांक हैं। तब $\sqrt{2} = b/a$ । चूँकि b/a परिमेय है, इसलिए $\sqrt{2}$ भी परिमेय होगी, जो कि $\sqrt{2}$ के अपरिमेय होने का विरोधाभास है। अतः **$1/\sqrt{2}$ अपरिमेय है।**

(ii) $7\sqrt{5}$:

[EN] Assume $7\sqrt{5} = a/b$ (where a, b are integers, co-prime, $b \neq 0$). Then $\sqrt{5} = a/(7b)$. Since a, b are integers and $7 \neq 0$, $a/(7b)$ is rational, which implies $\sqrt{5}$ is rational. But $\sqrt{5}$ is irrational (contradiction). Hence, **$7\sqrt{5}$ is irrational.**

[HI] माना $7\sqrt{5} = a/b$ तब $\sqrt{5} = a/(7b)$ । चूँकि $a/(7b)$ एक परिमेय संख्या है, अतः $\sqrt{5}$ भी परिमेय होनी चाहिए, जो कि विरोधाभास है। अतः **$7\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है।**

(iii) $6 + \sqrt{2}$:

[EN] Assume $6 + \sqrt{2} = a/b$ (rational, $b \neq 0$). Then $\sqrt{2} = a/b - 6 = (a - 6b)/b$. Since a, b are integers, $(a - 6b)/b$ is rational, implying $\sqrt{2}$ is rational. This contradicts the fact that $\sqrt{2}$ is irrational. Hence, **$6 + \sqrt{2}$ is irrational.**

[HI] माना $6 + \sqrt{2} = a/b$ तब $\sqrt{2} = (a - 6b)/b$ । दायाँ पक्ष परिमेय है, अतः $\sqrt{2}$ भी परिमेय होगी, जो कि असत्य है। अतः **$6 + \sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।**

Final Answer / उत्तर: All three sub-parts proven irrational / तीनों भाग अपरिमेय सिद्ध हुए।

Section 5: Chapter Summary, Key Formulas & Examination Tips

खंड 5: अध्याय सारांश, प्रमुख सूत्र एवं परीक्षा उपयोगी महत्वपूर्ण बिंदु

Topic / विषय	Key Formula & Fact (English)	प्रमुख सूत्र एवं तथ्य (हिंदी)
Prime Factorisation	Composite Number = Product of powers of prime numbers (Unique).	भाज्य संख्या = अभाज्य संख्याओं की घातों का गुणनफल (अद्वितीय)।
HCF × LCM Formula	$HCF(a, b) \times LCM(a, b) = a \times b$ (Valid for TWO numbers only).	$HCF(a, b) \times LCM(a, b) = a \times b$ (केवल दो संख्याओं हेतु मान्य)।
Divisibility by Prime	If prime p divides a^2 , then p divides a .	यदि अभाज्य p , a^2 को विभाजित करता है, तो p , a को भी विभाजित करेगा।
Irrationality Rule	$\sqrt{p}$ is irrational for any prime number p . Rational $\pm$ Irrational = Irrational.	किसी भी अभाज्य संख्या p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय है। परिमेय $\pm$ अपरिमेय = अपरिमेय।

© TYBA Coaching Centre (टी वाई बी ए कोचिंग सेंटर) — All Rights Reserved. For Admissions, Regular Batch Coaching & Doubt Clearing Sessions, Contact: **6367029449**.